

الطرق العددية في الهندسة

Numerical Methods IN ENGINEERING

تأليف

Mario G. Salvadori

AND

Melvin L. Baron

وترجمة

الاستاذ المساعد الدكتور عبدالاله يونس الاستاذ المساعد معروف محمد حديد

الاستاذ المساعد رشيد عبدالرزاق الصالحي

جامعة بغداد

مقدمة المترجمين

قررت وزارة التعليم العالي والبحث العلمي تكليفنا بترجمة كتاب الطرق العددية في الهندسة (تأليف ماريوسلفادوري ، مليفن بارون) ليكون كتاباً منهجياً لطلبة الصفوف الثالثة من أقسام الري والبزل في كليتك الهندسة .

لقد اعتمدنا في ترجمة الكتاب الموسوم اعلاه على المصطلحات العلمية التي اقترتها الجامعات العلمية العربية واجتهدنا فيما عدا ذلك حيث توخينا الدقة في المعنى العلمي وسلامة اللفظ العربي وذلك بالاعتماد على الالفاظ في القرآن الكريم والسنة النبوية الشريفة بالإضافة الى معاجم اللغة مثل كتب الافصح في اللغة للصعدي وعلى معجم الوسيط من مطبوعات مجمع اللغة العربية بالقاهرة . اما الرموز العلمية والمعادلات الرياضية والرسوم البيانية فقد تركناها على حالاتها دون ترجمة عملاً بتوصيات التعريب الرسمية المرحلية .

ومما لا ريب فيه ان كل عمل لا يخلو من الاخطاء فقد حاولنا جهد الاستطاعة تقليلها اذ الكمال لله وحده ، لذلك نرجو الصفح من اخواننا التدريسيين امليين منهم كل تعاون ونقد بناء كما نشكر عمادة كلية الهندسة لجهودها الرائدة في انجاح عملية التعريب وذلك بما اسدته من جهد جهيد في توفير المراجع العلمية والمعاجم الضرورية لانجاح عملية التعريب وترشيدها والله الموفق الهادي الى سواء السبيل .

المترجمون

عبدالله يونس

معروف محمد العاني

رشيد الصالحي

مقدمة الطبعة الثانية

ان الاهتمام المتزايد بالطرق العددية ، والقبول الحسن للطبعات الانكليزية والبرتغالية والروسية والصينية من هذا الكتاب ثم ان اعداد طبعات اسبانية وبابانية وإيطالية قد اقنعنا بان تنقيحها في الكتاب قد ان اوانه . وفي هذا التنقيح ابقينا دون تغيير الطابع الابتدائي للكتاب مع توسيع افاقه وتصحيح الاخطاء الثانوية والمطبعة في طبعه الاولى .

اضفنا الى الفصل الاول معالجة لمعادلات الدرجة الرابعة بطريقة براون ، وتوطئة بسيطة لطريقة كرفي للحدود المركبة ، وطريقة لحساب معكوس المصفوفات وطريقة لحل المعادلات الانية غير الخطية . كما اضيف بند جديد لحل مسائل البرمجة الخطية بطريقة المبسط .

واضيف في الفصل الثاني بند عن قاعدة سترنك للاستكمال وعن الاستكمال بطريقة لاكرانج كما وسعت الى حد كبير معالجة قواعد التريبع اضافة الى استعمال الفروق المركزية في تدقيق جداول القيم .

وشمل الفصل الثالث طرق المنبيء - المصحح للمعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى والثانية . كما مدت طريقة نومبروف الى معادلات من مرتبة اعلى . كما خصص بند منفصل لتكامل معادلات الفروق لتحسين استيعاب تراكم الخطأ في التكامل خطوة بخطوة .

وبينما لم تمس بنهء الفصل الرابع فان الفصل الخامس قد اعيدت كتابته كليا . وتم التأكيد على الفروق الاساسية في طرق تكامل المعادلات الزائدية والمكافئة والناقصية . كما وسع البند عن التكامل المزدوج ليشمل تكاملات ذات حدود متغيرة واشتقت مؤثرات بواسان محسنة في احداثيات ديكارتية ومثلثة كما حلل استقرار الحل العددي للمعادلات المكافئية .

وقد اضيفت مسائل جديدة عن الطرق التي قدمت في الكتاب لاول مرة ، مع اجوبة المسائل المتناوبة ويقارب عدد المسائل الآن الخمسمائة .

انا نود ان نعبر عن امتناننا الى السيدة الفاماتيوس سلمون والسيد ريموند بارنيس . اللذين حلا بعناية جميع المسائل الجديدة . والى الدكتور . ل . لوالذي رسم بعض المرسومات الجديدة .

ماريوجي . سلفادوري

ملفن د . بارون

نيويورك

مقدمة الطبعة الأولى

لقد نما اهتمام الرياضي التطبيقي والعالم في الطرق العددية الى حد بعيد خلال العقود الاخيرة لاسباب عديدة . ان الحاسبات المنصدية والالكترونية جعلت من الممكن اليوم اجراء حسابات لم يكن من السهل الاقدام عليها قبل بضعة سنوات . ان المسائل التقنية ، والتي لم يكن ممكنا الحصول على حل لها ، قد زادت عددا وتعقيدا وتتطلب حلا فوريا الان بينما اصبح عدد الفنيين القادرين على الحلول التحليلية المعقدة صغيرا جدا . ان الطرق العددية تسمح باستعمال افراد معرفتهم الرياضية معدودة .

ان هذه الظروف توضح شيوع الطرق العددية وتؤشر الحاجة المتزايدة الى افراد بمهارة عددية والى مواضيع في الطرق العددية في الكليات والجامعات .

لقد تطور هذا الكتاب من مجموعة محاضرات استعملت لتدريس موضوع فصلي في مدرسة الهندسة بجامعة كولومبيا . وكان هذا الموضوع اخر سلسلة من خمسة بدأها المؤلف قبل عدة سنوات لتوسيع الخلفية الرياضية لطلبة الدراسات الاولى والعليا لملء الفجوة في المعرفة بين الرياضيات النظرية وبين فنون حل المسائل الفيزيائية بالطرق الرياضية .

من الواضح ان استيعاب حقل الطرق العددية الواسع والمتنامي هو من المستحيلات في كتاب بهذا الحجم المتواضع . ان الغرض من هذا الكتاب هو تعريف الطالب والعالم الممارس والمهندس بصورة خاصة ، بهذه الطرق الابتدائية التي غالبا ما تحتاجها في حل المسائل الفنية وعليه فان الكتاب موجه الى طلبة الهندسة والفيزياء والكيمياء والرياضيات والى اي شخص يرغب ان يتعلم الطرق العددية ليطبقها في عمله المهني . ويفترض ان للقارئ معرفة بالحسبان ومعرفة سطحية بالمعادلات التفاضلية .

ان فصول الكتاب الخمسة تعالج المواضيع التالية :

- 1- حلول المعادلات الجبرية من المرتبات العالية والمعادلات الجبرية الانية الخطية .
- 2- النظرية الابتدائية للفروق المحدودة وتطبيقاتها للتفاضل والتكامل والاستكمال والاستيفاء العددي .
- 3- حل مسائل القيم الابتدائية العادية .
- 4- حل مسائل القيم الحدودية العادية ومسائل القيم المميزة .

5- حل مسائل تتضمن معادلات تفاضلية جزئية من النوع الحدودي والمميز والمختلط .
عند تقديم مادة هذا الكتاب ، جعلت نظرية الفروق المحدودة الاساس الموحد لكل
الطرق العددية حيث ان هذا يجعل معالجة المواضيع المتنوعة اقتصادية ويتجنب
التكرار غير الضروري .

ويسمح . خلال الكتاب . بطريقة بسيطة لتقييم الاخطاء ، وربما يسمح لأول مرة
بالاستعمال المنتظم لطرق استيفاء كفاءة .

ان الطرق العددية المختلفة قدمت او طبقت على مسائل توضيحية بسيطة مأخوذة من
فروع الهندسة المتعددة (الميكانيك . مقاومة المواد . الكهرباء ، المرونة ، اللدونة ، جريان
الحرارة . الاهتزازات . الاستقرار المرن .. الخ) وذلك لاعطاء اوسع مجال ممكن للتطبيقات
ضمن حدود الكتاب ومتطلبات معرفة القارئ . على ان القارئ لا يحتاج الى المام بحقل
المعرفة المشمول بالمسألة التوضيحية لكي يستوعب الطريقة العددية .

ان اختيار الطرق استند على بساطتها وكفاءتها : فلقد عرف بعضها لاكثر من قرنين ،
اما الاخرى فقد طورت في الماضي القريب . ان الاجهزة العددية التي يمكن تطبيق هذه
المسائل عليها هي الحاسبة المنضدية عادة والمسطرة الحاسبة في احيان كثيرة . اما الحاسبات
الالكترونية الحديثة . والتي من الواضح ان اغلب هذه الطرق تطبق عليها ، فقد نحاشينا
ذكرها حيث ان نظريتها تشكل حقلا جديدا كليا في الرياضيات التطبيقية .

ان المسائل في نهاية كل فصل من نمطين اساسا : تمارين عددية صرفة ثم مسائل
تطبيقية . ان العديد من التمارين العددية تمثل مسائل فيزيائية واقعية ويمكن تفسيرها ،
مناظرة . بطرق متنوعة . اما الصياغة الرياضية للمسائل التطبيقية فانها معطاة او يمكن
اشتقاقها من نص الكتاب او من المراجع المتعددة في الهوامش . كما اعطيت اجوبة المسائل
المتناوبة واجوبة جميع المسائل ذات الاهتمام العام .

لقد قام ملفن د . بارون . تحت اشرافي بالمهمة الدقيقة والمتعبة في تجميع وحل الاربعمائة
سؤال التي يحتويها هذا الكتاب . كما دقق حلول المسائل في النص ورسم مخططات
المرسمات . يسعدني ان اعبر عن امتناني العميق لجهوده الكفوة .

ان الكتب والاشخاص الذين تعلمت الرياضيات العددية منهم اكثر من ان يحصون

هنا ، غيراني انتهز هذه الفرصة لاعبر عن امتناني للاستاذ موروييجوني ، مدير المختبر الوطني
الاطالي للحسابات ، الذي كان اول من علمني حب الارقام عندما كنت احد طلبته في
جامعة روما قبل عشرين سنة .

انني مدين لاصدقائي وزملائي ، الاستاذ ر. جي . شوارتز لمراجعته الثاقبة للمسودة ،
والاستاذ ف. ه. لي للعناية التي اولاهها لرسم المرسومات . كما ان السيدة ارنو موريارتي
اعطت برهانا جديدا لبراءتها الفائقة في طبع الكتاب .

ماريوجي . سلفادوري .

نيويورك

I الفصل الاول

الحلول العملية للمعادلات الجبرية والمتسامية

The Practical Solution of Algebraic and Transcendental Equations

1.1 المقدمة

ان حل المعادلات الجبرية والمعادلات المتسامية ومجموعة المعادلات الآتية الخطية هو أحد الاغراض التي تزاو في كثير من الاحيان في الرياضيات التطبيقية . يتطلب عمليات حسابية متعبة .

هناك طرق نظرية لانجاز تلك الحسابات وبالرغم من وجود تلك الطرق . وبعضها غاية في البراعة من الناحية النظرية . لازالت عملية ايجاد الجذور من العمليات المتعبة .

سنعطي طرقا لتعيين الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلات الجبرية ذات الدرجات العالية كما سنعطي طرقا لتعيين الجذور الحقيقية للمعادلات المتسامية . كذلك سنعطي طرق تعيين الجذور الحقيقية للمعادلات الخطية الآتية . ونبحث في استخدام تكييف هذه الطرق باستخدام المساطر الحاسبة والحاسبات الكهربائية حيث تكون النتائج مقربة في حدود خمسة الى عشرة ارقام معنوية . كما انه ستحل بهذه الطرق المعادلات الآتية الخطية في حدود اربعين الى المائة معادلة (ان كفاءة الحاسبات الالكترونية الحديثة تفوق ذلك بكثير) .

ان الاطار العام لهذه الحلول هو تجميع عدة طرق لتقليل الجهد في الحل غير ان للقارئ الحرية في اختيار الطريقة التي تلائم حيث ان الخبار مسألة تعلم ومفاضلة شخصية

1.2 الجذور الحقيقية للمعادلات الجبرية :

Real Roots of Algebraic Equations

المعادلة الجبرية من درجة n تكتب بالشكل التالي :-

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1.2.1)$$

ان لهذه المعادلة n من الجذور بعضها حقيقية مختلفة والبعض الآخر حقيقية مكررة والباقي أزواج من الجذور المركبة المترافقة .

لحل المعادلات الجبرية ذات الدرجات العالية يفضل ان نعين الجذور الحقيقية وترتيب تنازلي لقيمتها المطلقة . ان خير طريقة في تعيين هذه الجذور هي المحاولة والخطأ وعندئذ نقلل من درجة تلك المعادلة .

تستخدم قاعدة «ديكارت» للاشارات في تعيين عدد الجذور الموجبة والسالبة المتوقعة حيث تنص هذه القاعدة على ان عدد الجذور الموجبة يساوي عدد التغيرات في اشارة معاملات المعادلة (أو أقل من ذلك بأي عدد زوجي) . كما أن عدد الجذور السالبة يساوي عدد الاشارات المتكررة تواليا في المعاملات (أو أقل من ذلك بأي عدد زوجي) . يجب أن يدخل في هذا الحساب جميع المعاملات ذات القيم الصفرية على أنها ذات اشارة موجبة .

اذا كانت n في المعادلة (1.2.1) عددا فرديا فان لهذه المعادلة جذر حقيقي واحد على الاقل اشارته مخالفة لاشارة المقدار a_0/a_n لتصنع المعادلة لجذورها الحقيقية التي لا تتجاوز قيمتها المطلقة عن الواحد . احسب $f(x)$ لقيم (x) الواقعة في الفترة $-1 \leq x \leq 1$ على مراحل 0.2 أو 0.1 ولجذور المعادلة (1.2.1) التي قيمتها المطلقة أكبر من الواحد ضع .

$$x = \frac{1}{\xi} \quad (a)$$

وتحسب المعادلة ادناه للقيم

$$a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\xi + a_n = 0. \quad (1.2.1a)$$

ان الجذر الاكبر للمعادلة (1.2.1) على الاكثر يكون حوالي جذر المعادلة .

$$a_n x + a_{n-1} = 0 \quad (1.2.2)$$

أو تكون قيمته المطلقة حوالي اكبر جذري المعادلة

$$a_n x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0. \quad (1.2.3)$$

علما بانه عندما يكون اكبر جذر للمعادلة (1.2.1) اعظم كثيرا بالقيمة المطلقة من جميع الجذور الاخرى فان القيم التقريبية اعلاه تكون دقيقة بينما يمكن تقرب اصغر جذر

للمعادلة (1.2.1) بالمثل بجذر المعادلة

$$a_1x + a_0 = 0 \quad (1.2.4)$$

أو بالجذر الاصغر (في القيمة المطلقة) من جذري المعادلة

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (1.2.5)$$

عندما يكون اصغر جذر للمعادلة (1.2.1) اصغر كثيرا من جميع الجذور الاخرى.
ان الجذور x_i (حيث $i = 1, 2, \dots, n$) للمعادلة (1.2.1) يمكن اختبارها بعلاقات
نيوتن التالية :

$$\sum_{i=1}^n x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad (1.2.6a)$$

$$\sum_{(i,j)=1}^n x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \quad (1.2.6b)$$

$$\sum_{(i,j,k)=1}^n x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \quad (1.2.6c)$$

.....

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \quad (1.2.6d)$$

التي فيها $i \neq j \neq k \neq \dots$

لايجاد قيمة متعددة الحدود $f(x)$ وقيم مشتقاتها المتعاقبة عند قيمة معينة مثل x_0 نستخدم
طريقة التعويض (أو القسمة) التركيبي بصورة متعاقبة كما هو مبين بالجدول 1.1

Synthetic Substitution

a_n	a_{n-1} $b_n x_0$	a_{n-2} $b_{n-1} x_0$	\dots \dots	a_2 $b_3 x_0$	a_1 $b_2 x_0$	a_0 $b_1 x_0$
$b_n \equiv a_n$	b_{n-1} $c_n x_0$	b_{n-2} $c_{n-1} x_0$	\dots \dots	b_2 $c_3 x_0$	b_1 $c_2 x_0$	$b_0 \equiv f(x_0)$
$c_n \equiv b_n$	c_{n-1} $d_n x_0$	c_{n-2} $d_{n-1} x_0$	\dots \dots	c_2 $d_3 x_0$	$c_1 \equiv \frac{1}{1!} f'(x_0)$	
$d_n \equiv c_n$	d_{n-1}	d_{n-2}	\dots	$d_2 \equiv \frac{1}{2!} f''(x_0)$		

جدول (١-١) التعويض التركيبي

بوضع صفر عوضا عن معامل x للقوى المختلفة التي لا تظهر في المعادلة . في المثال التالي سنوضح طريقة لتحديد مواقع الجذور الحقيقية للدالة :-

$$y = f(x) = x^3 - 12.2x^2 + 7.45x + 42 = 0, \quad (b)$$

وحسب قاعدة الإشارة لديكارت يمكن ان يكون لها جذران موجبان . أولا جذر موجب لها كما ان لها جذر سالب واحد فقط .
القيمة التقريبية لأكبر جذر معطاة بالمعادلة التالية :

$$x - 12.2 = 0$$

$$x^2 - 12.2x + 7.45 = 0.$$

أو بالمعادلة

المعادلة الاولى تعطي $x_1 = 12.2$ والثانية تعطي

$$x_1 = 6.1 + \sqrt{(6.1)^2 - 7.45} = 11.55,$$

إذا أخذت الإشارة + أمام علامة الجذر التربيعي للحصول على أكبر جذر . ونطبق القسمة التركيبية مع تجربة $x_1 = 12$ نحصل على

	1	-12.2	7.45	42
12		12.0	-2.40	60.6
	1	-0.2	5.05	102.6

ان قيمة الباقي يمكن ان تقود القاريء الى الاعتقاد بان الجذر $x_1 = 12$ هو تقرب رديء للجذر x_1 ولكن هذا ليس بصحيح ذلك لان قيمة الباقي حساسة لأي تغير في قيمة الجذر عندما يكون الجذر اكبر من الواحد بكثير . وبالفعل فان محاولة ثانية بقيمة $x_2 = 10$ تعطي

	1	-12.2	7.45	42
10		10.0	-22.00	-145.50
	1	-2.2	-14.55	-103.50

القيمتان $x_1 = 12$, $x_2 = 10$ تقربان الجذر من الاعلى والاسفل على التوالي وان تقريبا أفضل يمكن الحصول عليه بواسطة الاستكمال الخطي . ان تقاطع المستقيم الواصل

$$P_2(x_2, y_2), P_1(x_1, y_1)$$

بين

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

مع محور السينات ($y = 0$) هو

$$x_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} \quad (1.2.7)$$

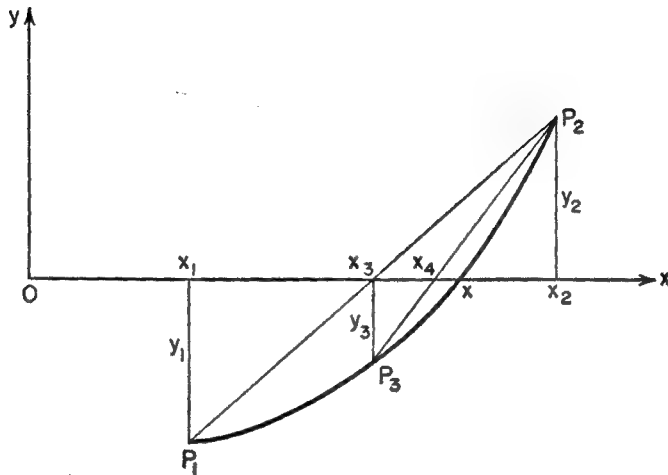
وهو قيمة التقريب المستكمل خطيا x_3 (الشكل 1.1) . ان المقدار الموجود في الطرف الايمن من المعادلة (1.2.7) يمكن حسابه بعملية واحدة على الحاسبة .
 ان تطبيق المعادلة (1.2.7) للتقريب التي يكون فيها $x_1 = 12$, $y_2 = -103$

$$y_1 = 103, x_2 = 10$$

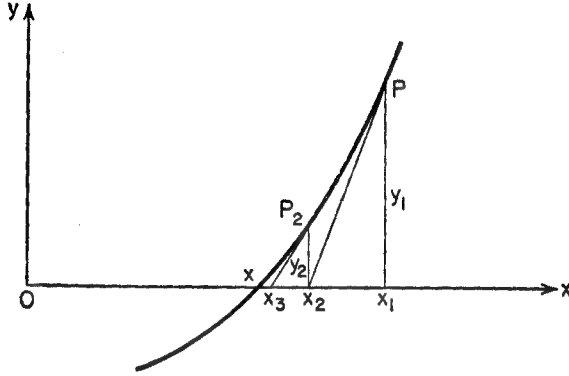
$$x_3 = \frac{12(-103) - 10(103)}{-103 - 103} = 11,$$

وان التقسيم يعطي الباقي $y_3 = -21.25$. نستطيع الآن ان نجرى الاستكمال الخطي بين 11 و 12 فنحصل على $x_4 = 11.17$ مع الباقي الذي قدره -3.55 . واخيرا نضمن القيمة 11.20 التي تعطي

11.20	1	-12.2	7.45	42	(c)
		11.2	-11.20	-42.0	
	1	-1.0	-3.75	0	



شكل (1-1) الاستكمال الخطي



شكل (١-٢) طريقة المماس لنيوتن

وتبين أن $x = 11.2$ هو الجذر المطلوب .

كبدل لهذه الطريقة . وبميزة محددة عادة . يمكن استخدام طريقة المماس لنيوتن (الشكل 1.2) لتحسين التقريب الاول للجذر . أن x_{n+1} هي نقطة تقاطع مماس المنحني $y = f(x)$ المرسوم عند النقطة $x = x_n$ مع محور السينات ($y = 0$) وهي معطاة بالمعادلة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.2.8)$$

باستخدام التعويض التركيبي مرتين متعاقبتين نحصل على $f(x_n)$ و $f'(x_n)$ ثم نقيم التقريب التالي x_{n+1} للجذر ، باخذ $x_1 = 12$ نحصل ، بخطوتين ، على

	1	-12.2	7.45	42
$x_1 = 12$		12.0	-2.40	61
	1	- 0.2	5.05	$103 = f(x_1)$
$x_1 = 12$		12.0	142	
	1	11.8	$147 = f'(x_1)$	

$$x_2 = 12 - \frac{103}{147} = 12 - 0.7 = 11.3.$$

باستخدام القيمة الجديدة $x_2 = 11.3$ نحصل على

	1	-12.2	7.45	42.0
$x_2 = 11.3$		11.3	-10.17	-30.7
	1	- 0.9	- 2.72	$11.3 = f(x_2)$
$x_2 = 11.3$		11.3	117.52	
	1	10.4	$114.80 = f'(x_2)$	

$$x_3 = 11.3 - \frac{11}{115} = 11.3 - 0.1 = 11.2,$$

وهو نفس الجذر الذي حصلنا عليه سابقا

يمكن الوصول الى الجذر باسرع من هذا بقليل من الجهد الاضافي وذلك بان نستخدم طريقة نيوتن من المرتبة الثانية . نفتح $f(x)$ بمسلسلة تيلر حول النقطة $x = x_n$ لغاية ثلاثة حدود بعد وضع : -

$$x_{n+1} - x_n = h, \quad (1.2.9)$$

نحصل على : -

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)}{2} h^2 + \dots = 0,$$

أو

$$f(x_n) + h \left[f'(x_n) + \frac{f''(x_n)}{2} h \right] = 0. \quad (d)$$

بتقريب قيمة h الموجودة داخل القوس المستطيل بالمعادلة (1.2.8) . أي

$$h = -f(x_n)/f'(x_n) \quad \text{فان المعادلة (d) تعطي}$$

$$\frac{1}{h} = -\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} + \frac{f''(x_n)/2}{f'(x_n)}. \quad (1.2.10)$$

وهكذا انطلاقا من القيمة $x_1 = 12$ تعطي المعادلة (b)

	1	-12.20	7.45	42.00
$x_1 = 12$		12.00	-2.40	60.60
	1	-0.20	5.05	102.60 = $f(x_1)$
$x_1 = 12$		12.00	141.60	
	1	11.80	146.65 = $f'(x_1)$	
$x_1 = 12$		12.00		
	1	23.80 = $(1/2)f''(x_1)$		

$$\frac{1}{h} = -\frac{146.65}{102.6} + \frac{23.8}{146.65} = -1.27; \quad h = -0.79;$$

$$x_2 = x_1 + h = 12.00 - 0.79 = 11.21.$$

ان احدى الميزات الرئيسية للقسمه التركيبية هي انها تعطي بصورة مباشرة معاملات المعادلة المختزلة التي جذورها هي الجذور المتبقية للمعادلة الاصلية . ان القسمه التركيبية

للمعادلة (h) على $x - 11.2$ تعطي معادلة الدرجة الثانية التي تظهر معاملاتها في السطر الاخير من النهج (c)

$$x^2 - x - 3.75 = 0,$$

والتي يمكن حلها حيث نحصل على الجذرين الآخرين للمعادلة (b)

$$x = 0.5 \pm \sqrt{0.25 + 3.75} = \begin{cases} +2.5 \\ -1.5. \end{cases}$$

تعميما لنتائج هذا المثال . فانه يمكن الحصول على (m) من الجذور الحقيقية للمعادلة الجبرية جذرا فجزرا باستخدام القسمة التركيبية بصورة متعاقبة على :

$$(x - x_1), (x - x_2), \dots, (x - x_m)$$

لأية درجة من الدقة .

يجب أن تمارس عناية خاصة في استخراج الجذور عندما يكون اثنان متساويين تقريبا . أي مشرفين على التكرار . اذا كان جذر المعادلة $f(x) = 0$ بتكرر k من المرات فانه جذر $k - 1$ الاولى من مشتقاتها ايضا . بقسمة المعادلة التالية تركيبا على $x - 3$

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0,$$

نجد ان

	1	-5	3	9	
3		3	-6	-9	
	1	-2	-3		$0 = f(3)$
3		3	3		
	1	1			$0 = f'(3)$
3		3			
	1				$4 = (1/2)f''(3)$

وعليه فالجذر $x = 3$ مكرر مرتين .

عندما تكون $f'(x)$ صغيرة جدا بجوار جذر \bar{x} . تصبح المعادلتان (1.2.8) ، (1.2.10) حساستين للغاية لتغيرات x . في هذه الحالة يكون عمليا ان نعين اولا الجذر a للمعادلة $f'(x) = 0$ قريبا من الجذر \bar{x} ان نحسب $f''(a)$ وأن نفلك $f(x)$ بمسلسلة تيلر حول النقطة $x = a$ لثلاثة حدود فقط .

$$f(\bar{x}) = f(a) + f'(a)(\bar{x} - a) + \frac{1}{2}f''(a)(\bar{x} - a)^2 + \dots$$

$$\doteq f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(\bar{x} - a)^2.$$

للحصول على جذور $f(x)$ القريبة من $x = a$ نحل المعادلة من الدرجة الثانية
 $f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(\hat{x} - a)^2 = 0$,

فنحصل على

$$\bar{x}_{1,2} = a \pm \sqrt{\frac{-f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)}} \quad (1.2.11)$$

مثلا باستخدام القسمة التركيبية على المعادلة التالية مع أخذ $x = 1$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1.0001x + 0.9999 = 0$$

نحصل على

	1	-1	-1.0001	0.9999
1		1	0	-1.0001
	1	0	-1.0001	-0.0002 = f(1)
1		1	1.0000	
	1	1	-0.0001 = f'(1)	

بما ان كلا من $f(1)$ و $f'(1)$ صغيرة نحل اولاً المعادلة

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.0001 = 0$$

انطلاقاً من $x = 1$

	3	-2	-1.0001
1		3	1.0000
	3	1	-0.0001 = f'(1)
1		3	
	3	4 = f''(1)	

ونحصل على الجذر

$$a = 1 - \frac{-0.0001}{4} = 1.000025.$$

بتقييم $f(a)$ و $\frac{1}{2}f''(a)$ بالقسمة التركيبية

	1	-1.	-1.000100	0.999900
1 000025		1.000025	0.000025	-1.000095
	1	0.000025	-1.000075	-0.000195 = f(a)
1.000025		1.000025	1.000075	
	1	1.000050	0 = f'(a)	
1.000025		1.000025		
	1	2.000075 = (1/2)f''(a)		

وبواسطة المعادلة (1.2.11) نحصل على :-

$$\bar{x}_{1,2} = 1.000025 \pm \sqrt{-\frac{-0.000195}{2.000075}} = \begin{cases} 1.009899 \\ 0.990151. \end{cases}$$

ان الجذور الصحيحة للمعادلة هي 1.01 , 0.99 , -1.00 وعندما تختصر جميع الجذور الحقيقية من المعادلة ، يبقى زوج من الجذور الخيالية المترافقة في المعادلة المختزلة الاخيرة.

عندما تكون المعادلة المختزلة هي من الدرجة الثانية يستخرج الجذران الخياليان المترافقان رأساً بدستور. عندما تكون المعادلة المختزلة الباقية من الدرجة الرابعة او السادسة او اعلى من ذلك يكون من الملائم ان نعزل فيها عوامل الدرجة الثانية المسببة لكل زوج من الجذور الخيالية.

1.3 حل المعادلات من الدرجة الرابعة بطريقة براون

Brown's Method for Quartic equations

يمكن تحليل معادلة من الدرجة الرابعة الى معاملين من الدرجة الثانية مباشرة بطريقة براون :-

لنكن المعادلة من الدرجة الرابعة هي :-

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (1.3.1)$$

عين المعاملات التالية :-

$$b_1 = a_3a_1 - 4a_0; \quad b_0 = a_0(4a_2 - a_3^2) - a_1^2 \quad (1.3.2)$$

ثم احسب جبريا اكبر جذر حقيقي z_3 للمعادلة التكعيبة التالية :-

$$z^3 - a_2z^2 + b_1z + b_0 = 0. \quad (1.3.3)$$

احسب المعاملات

$$c_{1,2} = \frac{a_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 - a_2 + z_3} \quad (1.3.4)$$

$$d_{i,j} = \frac{z_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{z_3}{2}\right)^2 - a_0} \quad (1.3.5)$$

ثم تحقق أيا منهما d_i , d_j هو d_1 وأيا هو d_2 بواسطة العلاقة التالية

$$c_1 d_2 + c_2 d_1 = a_1. \quad (1.3.6)$$

المعادلتان من الدرجة الثانية واللذان هما عوامل المعادلة (1.3.1) مما

$$x^2 + c_1 x + d_1 = 0; \quad x^2 + c_2 x + d_2 = 0. \quad (1.3.7)$$

مثلا لنأخذ المعادلة التالية

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 24x + 16 = 0.$$

نحصل على :-

$$a_3 = -6; \quad a_2 = 18; \quad a_1 = -24; \quad a_0 = 16;$$

$$b_1 = (-6)(-24) - 4(16) = 80;$$

$$b_0 = 16[(4)(18) - (-6)^2] - (-24)^2 = 0;$$

$$z^3 - 18z^2 + 80z = 0;$$

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 8; \quad z_3 = 10;$$

$$c_{1,2} = \frac{-6}{2} \pm \sqrt{9 - 18 + 10} = \begin{cases} -2; \\ -4; \end{cases}$$

$$d_{i,j} = \frac{10}{2} \pm \sqrt{25 - 16} = \begin{cases} 8; \\ 2; \end{cases}$$

$$c_1 d_2 + c_2 d_1 = -2(2) - 4(8) = -36;$$

$$c_1 d_2 + c_2 d_1 = -2(8) - 4(2) = -24;$$

$$d_2 = 8; \quad d_1 = 2;$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0; \quad x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm i; \quad x_{3,4} = 2(1 \pm i).$$

1.4 طريقة كرايفي

Graeffe's Method

لنفرض انه أعطينا المعادلة الجبرية $f(x) = 0$ والتي جذورها

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > \dots > |x_n|,$$

فالمعادلة

$$F(-x^2) = 0$$

والتي جذورها

$$-x_1^2, -x_2^2, -x_3^2, \dots, -x_n^2$$

تكون عواملها b_i والتي نحصل عليها تبعاً لنهج الجدول 1.2

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	\dots	a_3	a_2	a_1	a_0
a_n^2	a_{n-1}^2	a_{n-2}^2	a_{n-3}^2	\dots	a_3^2	a_2^2	a_1^2	a_0^2
	$-2a_n a_{n-2}$	$-2a_{n-1} a_{n-3}$	$-2a_{n-2} a_{n-4}$	\dots	$-2a_4 a_2$	$-2a_3 a_1$	$-2a_2 a_0$	
		$+2a_n a_{n-4}$	$+2a_{n-1} a_{n-5}$	\dots	$+2a_5 a_1$	$+2a_4 a_0$		
			$-2a_n a_{n-6}$	\dots	$-2a_6 a_0$			
b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_3	b_2	b_1	b_0

جدول (١-٢) نهج كرايفي

بتطبيق نفس الاسلوب على $F(-x^2) = 0$ نحصل على معادلة جذورها $-x_i^4$ ويتكرر هذه العملية عدداً كافٍ من المرات r . للمعادلة الأخيرة جذور $-x_i^{2r}$ بحيث يكون :

$$|x_1^{2r}| \gg |x_2^{2r}| \gg |x_3^{2r}| \gg \dots \gg |x_n^{2r}|.$$

نرمز لمعاملات هذه المعادلة الأخيرة بـ c_i وندع $2r = m$ وبعلاقات نيوتن الواردة بالمعادلة (1.2.6) يكون

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^m &= -x_1^m = -\frac{c_{n-1}}{c_n} \\ \sum_{(i,j)=1}^n x_i^m x_j^m &= x_1^m x_2^m = +\frac{c_{n-2}}{c_n} \\ \sum_{(i,j,k)=1}^n x_i^m x_j^m x_k^m &= -x_1^m x_2^m x_3^m = -\frac{c_{n-3}}{c_n} \\ &\dots \end{aligned}$$

ويقسمة الثانية على الاولى والثالثة على الثانية وهكذا يكون

$$x_1^m = +\frac{c_{n-1}}{c_n}; \quad x_2^m = +\frac{c_{n-2}}{c_{n-1}}; \quad x_3^m = +\frac{c_{n-3}}{c_{n-2}}; \quad \dots \quad (1.4.1)$$

يجب علينا ان نميز ثلاثة حالات وهي :-

- (أ) عندما تكون كل الجذور حقيقية ، فالضرب المزدوج (double product)
الوارد في جدول 1.2 يصبح تافها يمكن اهماله مقارنة بقيمة α_i^2 وتكون جميع c_j
(مربعات كاملة) فالطريقة تقف عند هذه النقطة وتحسب الجذور من $\pm \sqrt{x_i^m}$
وتحدد العلامات من التعويض بالمعادلة الاصلية.

- (ب) عندما لا يصبح احد المعاملات c_j مربعا كاملا ولنقل c_s ولكنه يقع بين مربعين
كاملين c_{s+1}, c_{s-1} فالنسبة

$$r^{2m} = \frac{c_{s-1}}{c_{s+1}} \quad (1.4.2)$$

تعطي معامل الجذرين المركبين $\alpha_s \pm \beta_s i$ مرفوعين الى أس $(2m)$ أو جذرين حقيقيين
متساويين ($\beta_s = 0$) مرفوعين الى أس $(2m)$ للمعادلة الاصلية . ان الاجزاء الحقيقية والاجزاء
الخيالية α_s, β_s تعين بواسطة علاقات نيوتن عندما تعرف جميع الجذور الحقيقية ومعاملات
الجذور المركبة الاخرى كما مبين ادناه .

- ج- عندما يقع $(2k-1)$ غير مربع كامل بين مربعين كاملين c_{s-2k}, c_s فانه يوجد k
من ازواج الجذور المركبة متطابقة المعامل r الذي يساوي

$$r^{2km} = \frac{c_{s-2k}}{c_s} \quad (1.4.3)$$

تعين الجذور المركبة . بعد ازالة الجذور الحقيقية . بعلاقات نيوتن . فمثلا للمعادلة
من الدرجة الرابعة بمعرفة المعاملين r_3, r_1

$$r_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 \quad (a)$$

$$r_2^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2, \quad (b)$$

نحصل على

$$\sum_{i=1}^4 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad (c)$$

$$\sum_{(i,j)=1}^4 x_i x_j = r_1^2 + r_2^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n} \quad (d)$$

المجاهيل الاربعة $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ هي جذور المعادلات الاربعة (a), (b), (c), (d).

ان المعادلة التالية قد وجدت جذورها الحقيقية والمركبة كما مبين في النهج (f) التي تشير فيها الاسس الى قوى العشرة

$$x^4 - 15x^3 + 138x^2 - 324x + 200 = 0 \quad (e)$$

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	m
1°	-1.5^1	$+1.38^2$	-3.24^3	$+2.00^3$	1
1°	2.25^2 -2.76^3	1.9044^4 -0.9720^4 0.0400^4	10.4976^4 -5.5200^4	4.00^4	
1°	-0.51^2	0.9724^4	4.9776^4	4.00^4	2
1°	0.2601^4 -1.9448^4	0.9456^8 0.0508^8 0.0008^8	2.4777^9 -0.7779^9	1.60^9	
1°	-1.6847^4	0.9772^8	1.6997^9	1.60^9	4
1°	2.8382^8 -1.9944^8	0.9944^{16} 0.0057^{16} 0.0000^{16}	2.8890^{18} -0.3191^{18}	2.56^{18}	
1°	0.8438^8	1.0001^{16}	2.5699^{18}	2.56^{18}	8
c_4	c_3	c_2	c_1	c_0	

يلاحظ ان c_3 ليست مربعا كاملا ، ولذلك يوجد جذران حقيقيان وجذران مركبان مترافقان والجذور مقربة لرقمين عشرين هي

$$x_4^3 = \frac{c_0}{c_1} = 1.00; \quad x_4 = \pm 1.00; \quad x_3^8 = \frac{c_1}{c_2} = 257; \quad x_3 = \pm 2.00$$

$$(r_{1,2}^2)^8 = \frac{c_2}{c_4} = 1.00 \times 10^{16}; \quad r_{1,2}^2 = 100.$$

وبتعويض هذه بالمعادلة يظهر ان $x_3 = 2.00, x_4 = 1.00$, وباستخدام علاقة نيوتن نحصل على

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 1.00 + 2.00 + 2\alpha = -(-15), \quad \alpha = 6$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2 = 100; \quad \beta^2 = 100 - 36 = 64; \quad \beta = 8$$

$$x_{1,2} = 6 \pm 8i$$

ان المعادلة التالية لها جذور متطابقة المعاملات

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25 = 0 \quad (g)$$

وحلها مبين ادناه

1	-6	18	-30	25	$m = 1$
1	36	324	900	625	
	-36	-360	-900		
		+50			
1	0	14	0	6.25^2	$m = 2$
1	0	0.0196^4	0	39.0625^4	
	-0.2800^2	0	-1.7500^4		
		0.1250^4			
1	-0.2800^2	0.1446^4	-1.7500^4	39.0625^4	$m = 4$

منها $c_4 = 1$, $c_0 = 39.0625^4$ هما مربعان كاملان . و c_3, c_2, c_1 ليست كذلك . يوجد $k = 2$ زوج من الجذور

$$x_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i; \quad x_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i$$

بمعاملين متساويين بحيث ان

$$r^{2(2+4)} = 39.0625 \times 10^4 \quad \therefore \quad r^2 = 5.$$

بحل المعادلات (a), (b), (c), (d) من هذا البند نحصل على

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 5; \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 5; \quad 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = -(-6);$$

$$5 + 5 + 4\alpha_1\alpha_2 = 18,$$

ينتج

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = 2; \quad \beta_1 = 2; \quad \beta_2 = 1;$$

وعليه

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i; \quad x_2 = 2 \pm i.*$$

1.5 تعيين الجذور المركبة بالمعاودة Iteration

يمكن الحصول على العوامل من الدرجة الثانية . وفصلها عن المعادلة . بطريقة القسمة التركيبية على عوامل تجريبية من الدرجة الثانية الى ان نحصل على باق على شكل $s_1x + s_0$ وبحيث يصبح هذا العامل صفرا او قيمة صغيرة تهمل . ان اول تقرب لعامل الدرجة الثانية العائد للجذر الذي يكون مقياسه modulus غاية في الكبر في المعادلة (1.2.1) هو العامل

$$x^2 + a_{n-1}/a_n x + a_{n-2}/a_n. \quad (1.5.1)$$

بينما يكون اول تقرب لعامل الدرجة الثانية العائد للجذر الذي مقياسه غاية في الصغره هو :

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} \quad (1.5.2)$$

(جدول 1.3) يبين القسمة التركيبية على $x^2 + px + q$ (مأخوذة في القوة النازلية في x).

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 \\ &= (x^2 + px + q) \left(x^{n-2} + s_{n-1}x^{n-3} + s_{n-2}x^{n-4} + \dots + s_1x + s_0 + \frac{s_1x + s_0}{x^2 + px + q} \right) \end{aligned}$$

$-q$	$-p$	1	\rightarrow						
	1	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	\dots	a_2	a_1	a_0	
		$-p \cdot 1$	$-ps_{n-1}$	$-ps_{n-2}$	\dots	$-ps_2$	$-ps_1$		
			$-q \cdot 1$	$-qs_{n-1}$	\dots	$-qs_1$	$-qs_0$		
	1	s_{n-1}	s_{n-2}	s_{n-3}	\dots	s_2	s_1	s_0	

لاجل اختزال الباقي الخطي $s_1x + s_0$ للصفر ، يمكننا ان نستمر بالمحاولة والخطأ أو بالمعادلة . سنوضح كلا من الطريقتين في حل معادلة الدرجة الرابعة التالية :

$$f(x) = x^4 + 27.4x^3 + 307.44x^2 - 873.7x + 1503.11 = 0. \quad (a)$$

ان تقرب العامل الاصغري الدرجة الثانية لهذه المعادلة معطى بما يلي

$$x^2 - \frac{873.7}{307.44}x + \frac{1503.11}{307.44} = x^2 - 2.84x + 4.89 \doteq x^2 - 3x + 5.$$

ولحساب الباقي العائد للعامل $x^2 + px + q$ نستعمل أولاً نهج القسمة التركيبية للجدول 1.3 حيث فيه :

$$s_{n-1} = a_{n-1} - p; \quad s_{n-2} = a_{n-2} - ps_{n-1} - q, \quad \dots$$

بتقريب العامل $x^2 - 3x + 5$ وتطبيق هذا النهج على المعادلة (a) وتدوير المعاملات تعطي

-5	3	1	\rightarrow				
	1	27.4	307	-874	1503		
		3.0	91.2	1179.6			
			-5.0	-152.0	-1966		
	1	30.4	393.2	153.6	-463		

(b)

نلاحظ ان الباقي هو $153.6x - 463$ وان ناتج القسمة هو $x^2 + 30.4x + 393.2$
 نحاول الآن القسمة على $x^2 - 2x + 5$ ونحصل على :

-5	2	1	→		
	1	27.4	307	-874	1503
		2.0	58.8	721.6	
			-5.0	-147.0	-1804
	1	29.4	360.8	-299.4	-301

ان s_1 الذي هو معامل x في الباقي تغيرت اشارته . وتغيرت قيمة s_0 بصورة طفيفة . نحاول
 الآن القسمة على $x^2 - 3x + 4$

-4	3	1	→		
	1	27.4	307	-874	1503
		3.0	91.2	1182.6	
			-4.0	-121.6	-1576.8
	1	30.4	394.2	187.0	-73.8

ان المعامل s_1 موجب الآن وان قيمته أكبر من القيمة التي حصلنا عليها بالمحاولة الاولى وان
 الحد الثابت s_0 اصغر من سابقه . الآن نقسم على $x^2 - 2.5x + 4$ حاصلين على الباقي التالي
 $-49.1x - 8.2$ ولكن آخر محاولة تقسيم على $x^2 - 2.6x + 3.9$ تعطينا الباقي التالي
 $0.2x + 17$ الذي يمكن اعتباره صغيرا ، وناتج قسمة هو $x^2 + 30x + 381.10$ فالجذور
 الاربعة للمعادلة (a) هي تقريبا

$$x_{1,2} = 1.3 \pm \sqrt{(1.3)^2 - 3.9} = 1.3 \pm 1.49i;$$

$$x_{3,4} = -15 \pm \sqrt{(15)^2 - 381.10} = -15 \pm 12.5i;$$

ان القيم الصحيحة للجذور هي

$$x_{1,2} = 1.3 \pm 1.5i \quad x_{3,4} = -15 \pm 12.5i.$$

ان طريقة المعادة لفريد من (Friedman) (التي هي اسرع التماما) convergence
 من طريقة بارستو-لين (Barstow-Lin) (المعروفة اكثر) تغنيا عن الحدس غير أنها قد
 تلتزم (converge) ببطء نحو الجواب الصحيح أو قد لاتلتزم اطلاقا في الحالات التي تكون
 فيها معاملات الجذور المركبة مشرفة على التساوي . لذا ينصح ان نشتغل بطريقي المعادة
 والمحاولة والتجربة معا . ان طريقة فريد من تتطلب قسمة الطرف الايسر من المعادلة $f(x)$
 بواسطة التجربة على معامل من الدرجة الثانية مرتب حسب القوى التنازلية للمتغير x كما

الجدول 1.4 القسمة التركيبية على المقدار $p'x + q'x^2$ (بقوى x التصاعدية).

Synthetic Division by $1 + p'x + q'x^2$ (in ascending powers of x)

						←	1	$-p'$	$-q'$
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_3	a_2	a_1	a_0		
$-q's'_{n-2}$	$-p's'_{n-2}$ $-q's'_{n-3}$	$-p's'_{n-3}$ $-q's'_{n-4}$	\dots	$-p's'_2$ $-q's'_1$	$-p's'_1$ $-q's'_0$				
s'_n	s'_{n-1}	s'_{n-2}	\dots	s'_3	s'_2	s'_1	s'_0	a_0	

جدول (٤ - ١)

وهكذا انطلاقاً بالعامل التجريبي $x^2 - 3x + 5$ وبقسمة $f(x)$ عليه عندما نرتبها في القوى التنازلية | النهج (b) الصفحة 24 نحصل على الناتج التالي

$$x^2 + 30.4x + 393.2 = 393.2(1 + 0.077x + 0.0025x^2).$$

ان قسمة

$$f(x) = 1503.11 - 873.7x + 307.44x^2 + 27.4x^3 + x^4$$

علی

$$1 + 0.077x + 0.0025x^2$$

وتعطي القسمة بالقوى التصاعدية بنهج الجدول 1.4

←	1	-0.077	-0.0025
307.44	-873.70	1503.11	
76.19	-115.74		
-3.76			
379.87	-989.44	1503.11	

أي ناتج القسمة هو

$$1503.11 - 989.44x + 379.87x^2 = 379.87(x^2 - 2.60x + 3.96).$$

بإعادة هاتين العمليتين مرة أخرى وتجميعهما في جدول واحد حيث القسمة التي على اليسار مرتبة حسب القوى التنازلية بينما القسمة الموجودة على يمين الجدول مرتبة حسب القوى التصاعديّة نحصل على

-3.96	2.6	1	→	←	1	-0.0786	-0.00262
1	27.4	307.44		307.44	-873.70	1503.11	
	2.6	78.00		77.96	-118.14		
		-3.96		-3.94			
1	30.0	381.48*		381.46*	-991.84	1503.11	

أي ناتج قسمة هو :

$$x^2 + 30x + 381.48 = 381.48(1 + 0.0786x + 0.00262x^2)$$

على حسب الترتيب التنازلي .و

$$381.46x^2 - 991.84x + 1503.11 = 381.46(x^2 - 2.60x + 3.94)$$

بالنسبة للقسمة المرتبة حسب القوى التصاعدية . ان تقارب الناتجين المؤشرين بالنجمة يشير الى ان العملية « تلتم » (converge) وان المعاملين التقريبيين هما

$$x^2 + 30x + 381.48, | x^2 - 2.6x + 3.94$$

والتي جذورها هي

$$x_{1,2} = -1.3 \pm 1.5i; \quad x_{3,4} = -15 \pm 12.5i.$$

وهذه المعاملات صحيحة بالنسبة لعدد الارقام المحسوبة . يمكن حساب العامل الاكبر ذي الدرجة الثانية بطريقة فريد من مبتدئين بالقسمة المرتبة ترتيبا تصاعديا لقوى x بدلا من الترتيب التنازلي كالآتي

$$f(x) = x^6 - 16x^5 + 128x^4 - 504x^3 + 1156x^2 - 1360x + 800 = 0, \quad (c)$$

نبدأ بالقسمة على العامل الاكبر مرتبا حسب القوى التصاعدية والذي هو :

$$x^2 - 16x + 128 = 128(1 - 0.125x + 0.008x^2),$$

فيكون ناتج القسمة هو

$$74x^4 - 370x^3 + 993x^2 - \dots = 74x^2(x^2 - 5x + 13.4) + \dots$$

وتستمر العملية بالقسمة تبعا لترتيب قوى المتغير x تنازليا على العامل $x^2 - 5x + 13.4$

ثم بالقسمة البديلة كما هو مبين بالنهج (d)

	1	-16	128	128	-504	1156	-1360	800	
-13.4	5	1	→				←	1	0.125 -0.008
		5	-55	-46	124	-158	100		
			-13	-8	10	-6			
	1	-11	60	74	-370	992	-1260	800	
-17.03	5.83	1	→				←	1	0.183 -0.017
		6	-58	-58	168	-222	146		
			-17	-16	21	-14			
	1	-10	53	54	-315	920	-1214	800	
-17.35	5.85	1	→				←	1	0.189 -0.019
		5.9	-59.1	-58.1	173.4	-228.5	151.2		
			-17.4	-17.3	23.0	-15.1			
	1	-10.1	51.5	52.6	-307.6	912.4	1208.8	800	
-17.64	5.92	1	→				←	1	0.196 -0.019
		5.9	-59.2	-59.5	177.4	-235.8	156.8		
			-17.6	-17.2	22.9	-15.2			
	1	-10.1	51.2*	51.3*	-303.7	905.0	-1203.2	800	

النهج (d)

ان المعاملين التقريبين للمعادلة (c) هما

$$x^2 - 10.1x + 51.2 = 0$$

$$51.3(x^4 - 5.92x^3 + 17.64x^2 - 23.45x + 15.59).$$

ان جذري المعادلة الاولى هما

$$x_{1,2} = +5.05 \pm 5.07i.$$

حيث ان قيمتهما الصحيحتان هي

$$x_{1,2} = 5 \pm 5i.$$

1.6 المعادلات المتسامية Transcendental Equations

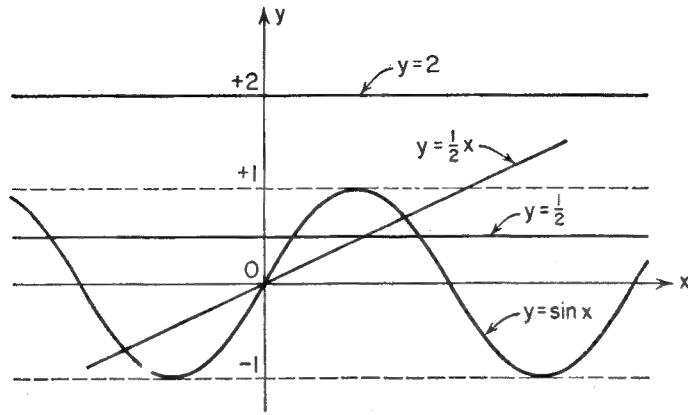
تسمى المعادلات غير الجبرية بالمعادلات المتسامية. قد يكون لمعادلة متسامية عدد منته (finite) او ما لانهاية من الجذور الحقيقية وقد لا يكون لها أي جذر حقيقي على الاطلاق فمثلا المعادلة

$$\sin x = 2$$

ليس لها أي جذر حقيقي (الشكل 1.3) غير ان لها ما لانهاية له من الجذور الخيالية .
والمعادلة

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

لها ما لانهاية له من الجذور الحقيقية (الشكل 1.3) . والمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}x$ لها ثلاثة جذور حقيقية (شكل 1.3) .



شكل (١-٣)

حالمًا يقرب جذر حقيقي لمعادلة متسامية من الأعلى والأسفل . تخطيطيًا (graphically) او بالمحاولة والخطأ . يمكن استعمال الاستكمال الخطي لتحسين قيمة الجذر باستخدام المعادلة (1.2.7) مثلاً المعادلة

$$y = f(x) = e^x - 3x = 0$$

لها جذران حقيقيان أحدهما يقع بين 0.4 وبين 0.9 (شكل 1.4) عند اخذ $x_1 = 0.9$ و $y_1 = -0.24$ وعند اخذ $x_2 = 0.4$ و $y_2 = 0.29$ تعطى المعادلة (1.2.7)

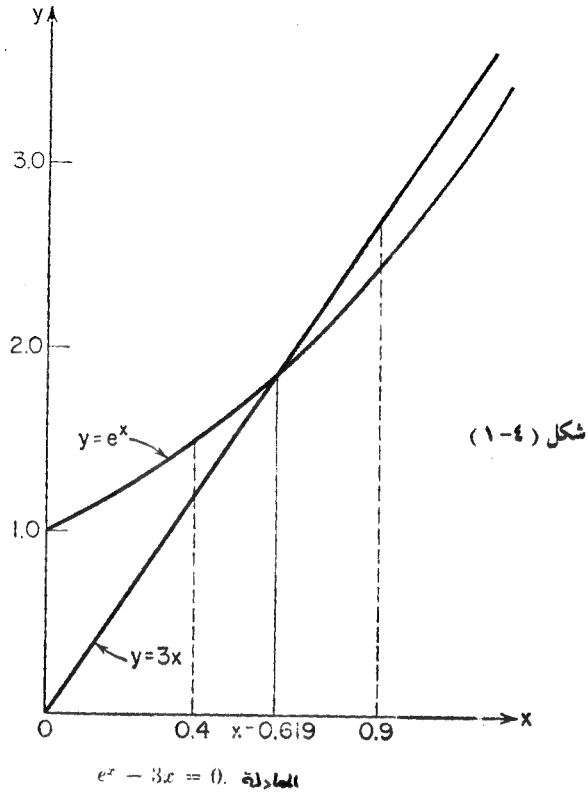
$$x_3 = \frac{0.9(0.29) - 0.4(-0.24)}{0.29 - (-0.24)} = 0.67$$

$$y_3 = -0.06$$

وباستعمال قيمة x هذه نحصل على

وبالاستمرار على نفس الأسلوب نحصل على التوالي . على

$$x_4 = 0.627, y_4 = -0.009 \text{ and } x_5 = 0.619, y_5 = 0.0001.$$



من ناحية اخرى لو استخدمنا طريقة المماس لنبتون [المعادلة (1.2.8)] يكون لدينا

$$f(x) = e^x - 3x; \quad f'(x) = e^x - 3; \quad \frac{1}{2}f''(x) = \frac{1}{2}e^x.$$

انطلاقاً عند النقطة $x = 0.4$

x	0.4	0.594	0.618	0.619
$f(x)$	0.292	0.029	0.001	0.0001
$f'(x)$	-1.508	-1.189	-1.145	
h	0.194	0.024	0.001	

وبطريقة نيوتن ذات المرتبة الثانية [معادلة (1.2.10)] نحصل على

x	0.4	0.614	0.619
$f(x)$	0.292	0.006	0.0001
$f'(x)$	-1.508	-1.152	
$\frac{1}{2}f''(x)$	0.746	0.924	
$1 \cdot h$	4.669	191.2	
h	0.214	0.005	

هناك طريقة اخرى تعين بها الجذور الحقيقية للمعادلات المتسامية . والتي لا تلتم في جميع الحالات . وهي ان نفك الدوال التي تظهر بالمعادلة بالمسلسلات الاسية (عندما يكون ذلك ممكنا) ثم نحل المعادلات الجبرية التي تنتج من قطع المسلسلات بعد حدين او ثلاث أو ... n من الحدود . ان مفكوك الطرف الايمن للمعادلة (a) مثلا يعطي

$$f(x) = e^x - 3x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\right) - 3x$$

$$= 1 - 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

وتكون المعادلات الجبرية المتتالية مع جذورها الصغرى هي

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 0 & x_1 &= 0.5 \\ x^2 - 4x + 2 &= 0 & x_1 &= 0.586 \\ x^3 + 3x^2 - 12x + 6 &= 0 & x_1 &= 0.613 \\ x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 48x + 24 &= 0 & x_1 &= 0.618. \end{aligned}$$

وقد تصبح هذه الطريقة ذات ميزة عندما يكون تعيين بضعة الجذور الاولى لمعادلة متسامية ضروريا .

لايجاد الجذور المركبة للمعادلة المتسامية $f(z) = 0$ نعوض عن المجهول بالمقدار $z = x + iy$ وندع كلا من جزئي $f(z)$ الحقيقي والخيالي مساويا للصفر . ان هذا يقود الى حل معادلتين آتيتين غير خطيتين والذي يمكن انجازه بطريقة البند (1.17) .

مثلا . نحصل على الجذور المركبة للمعادلة (a) بتغيير x الى z

$$f(z) = e^z - 3z = e^{x+iy} - 3(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$- 3x - 3yi = 0$$

ثم حل المعادلتين غير الخطيتين التاليتين

$$e^x \cos y - 3x = 0; \quad e^x \sin y - 3y = 0. \quad (b)$$

1.7 حل المعادلات الخطية الآنية بالمحددات

ان حل منظومات المعادلات الآتية الخطية يعتبر من بين أهم قضايا الرياضيات العددية واكثرها شيوعا . وقد تم عرض عدد كبير من الطرق لانجاز هذه المهمة ، كما ان عددا من الحاسبات الخاصة من النوع الرقمي [(digital) أو المماثل (analogue)] متوفرة حاليا لحل مثل هذه المعادلات .

ان الجذور x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) العائدة لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = c_n \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad \text{تعطى اصوليا بنسبة المحددين (1.7.2)}$$

حيث ان

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.7.3)$$

هو محدد المعاملات و

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.7.4)$$

ان طريقة التكتيف المرتكزى [طريقة جيو Chio] . هي من اكفأ الطرق لتقييم المحددات الرقمية (او الحرفية) طبقا للنهج التالي والذي يحسب كل عنصر بمحدد من المرتبة الثانية .

$$D = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \quad (1.7.5)$$

مثلا

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{4-2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1^{3-2}} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot 12 = 3.$$

ان الحل بواسطة المحددات يصبح شاقا عندما تكون (n) اكبر من 4 او 5 ولذلك فقد ابتكرت عدة طرق اخرى للحصول على نفس النتائج بكفاءة اكبر من طريقة الحل بالمحددات .

ان الطرق الاربعة التالية قد كيفة لاستخدام الحاسبات او المساطر الحاسبة ولها الخواص التالية :-

1- نهج كاوس (Gauss) هو اسلوب عام لحذف المجهول بصورة نظامية ومكيف لاستخدام المسطرة وسهل التذكر .

2- نهج كولسكي (Cholesky) هو اسلوب عام لحذف المجهول بصورة نظامية حسن التكيف للحاسبات الآلية .

3- طريقة كاوس - سايدل للمعاودة (Gauss-Seidel) وهو نهج بتسريب المتعاقب ينطبق على انماط محددة من المعادلات وحسن التكيف للحاسبات الآلية .

4- طريقة الارحاء (Relaxation method) وهي تتبع التقريب المتعاقب وقابلة للتطبيق على انواع متعددة من المعادلات ومكيفة لاستخدام المساطر الحاسبة .
ان كل هذه الطرق ستوضح بامثلة في البند التالي

1.8 نهج كاوس Gauss's Scheme

ان نهج كاوس للحذف مطبق في الجدول (1.5) على النموذج التالي

Eqs.	x_1	x_2	x_3	x_4	c
I	2	2	4	-2	10
II	1	3	2	1	17
III	3	1	3	1	18
IV	1	3	4	2	27

(1.8.1)

والذي تقرأ المعادلة (I) ، مثلاً بالشكل التالي

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 10.*$$

الجدول 1.5 هو جدول ذاتي التفسير من كل الوجوه . عدا الأرقام r والعمود S الأرقام r هي نسب المعاملات وتستخرج كما يلي . ان r_2 هونسبة معامل x_1 ، المحاط بالدائرة في السطر الثاني الى معامل x_1 ، المحاط بالمربع في السطر الاول بينما r_3 هونسبة معامل x_1 ، المحاط بالدائرة في السطر الخامس الى معامل x_1 ، المحاط بالمربع في السطر الاول وان r_3 هونسبة معامل x_2 ، المطوق بالدائرة في السطر السابع الى معامل x_2 ، المحاط بمربع في السطر الرابع وهكذا .

العمود S يستعمل للتحقيق وهو يمثل مجموع جميع المعاملات مع الحد الثابت في كل سطرويعامل كأى رقم اخر في نفس السطر . ان الرقم S في سطرها المقتنى بالعمليات المؤشرة في عمود الشرح . يجب ان يطابق مجموع الحدود في ذلك السطر . ان استعمال عمود التحقيق S يصبح ضروريا جدا متى مازاد عدد المجاهيل على الاربعة . الجذور نحصل عليها من المعادلات الواقعة في السطور التي تسلسلها n^2 أي (1,4,9,16) والتي تحتوي على 1, 2, 3, 4 من المجاهيل على التوالي وبالتعويض التراجعي ابتداء من آخر معادلة تكون المعادلات والجذور

(*) عادة يوضع الثابت (c) على يمين المعادلة.

Row 16:	$5x_4 = 20$	$x_4 = 4$
Row 9:	$-3x_3 + 6x_4 = 15$	$x_3 = 3$
Row 4:	$2x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 12$	$x_2 = 2$
Row 1:	$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 10$	$x_1 = 1$

ان استخدام نهج كاوس في حل عدة منظومات من المعادلات لها نفس معاملات المجاهيل ولكنها تختلف بقيم الحدود الثابتة لها ، (c) : يتطلب حساب العمودين (c) ، (S) فقط لكل مجموعة حيث ان الاعمدة الاخرى جميعها لا تتغير . انه من الممكن استخدام هذه الخاصية المهمة في نهج كاوس لحساب ارقام اضافية في الجذور بجهد اضافي طفيف . ولهذا الغرض يحسب الطرف الايسر (c') للمعادلات بالجذور المقننة ، ثم يحسب الفرق (e) بين الثابتين (c) (c') . وباستعمال هذه الفروق (e) كنوابت تحسب قيم جديدة للمجاهيل x' والتي باضافتها الى القيم السابقة تعطي قبا محسنة $x' + x$ لجذور المنظومة الاصلية .

يمكن انجاز هذه العمليات بالطريقة المبينة في القسم الاسفل من جدول ٢٠٤

Table 1.5
Gauss's Scheme

Rows	r	x_1	x_2	x_3	x_4	c	S	Explanations		
(1)		2	2	4	-2	10	16	(I)		
2	$r_2 = 1/2$	1	3	2	1	17	24	(II)		
3		-1	-1	-2	1	-5	-8	$-r_2 \times (1)$		
(4)		0	2	0	2	12	16	$(2) + (3)$		
5	$r_3 = 3/2$	3	1	3	1	18	26	(III)		
6		-3	-3	-6	3	-15	-24	$-r_3 \times (1)$		
7	$r'_3 = -2/2$	0	-2	-3	4	3	2	$(5) + (6)$		
8			2	0	2	12	16	$-r'_3 \times (4)$		
(9)			0	-3	6	15	18	$(7) + (8)$		
10	$r_4 = 1/2$	1	3	4	2	27	37	(IV)		
11		-1	-1	-2	1	-5	-8	$-r_4 \times (1)$		
12	$r'_4 = 2/2$	0	2	2	3	22	20	$(10) + (11)$		
13			-2	0	-2	-12	-16	$-r'_4 \times (4)$		
14	$r''_4 = 2/-3$		0	2	1	10	13	$(12) + (13)$		
15				-2	4	10	12	$-r''_4 \times (9)$		
(16)				0	5	20	25	$(14) + (15)$		
17	Const. c_i	10	12	15	20					
18	$-x_4 a_{i4}$	8	-8	-24	20				$x_4 = 20/5 = 4$	
19	$-x_3 a_{i3}$	-12	0	-9	$x_3 = (-9)/(-3) = 3$					
20	$-x_2 a_{i2}$	-4	4	$x_2 = 4/2 = 2$						
21	$(i = 1, 4, 9, 16)$	2	$x_1 = 2/2 = 1$							

جدول (۵ - ۱) نهج گاوس

مثلا تصور اننا استخرجنا جذور منظومة المعادلات (a) لرقمين ذي دلالة وكانت

$$x_3 = 1.3, \quad x_2 = 1.50, \quad x_1 = 1.60$$

Eqs.	x_1	x_2	x_3	c
I	1	2	1	6.00
II	2	1	1	6.11
III	1	1	2	5.73

(a)

فاننا نحسب

$$e_1 = 6.00 - (1.60 + 2 \cdot 1.50 + 1.30) = 0.10$$

$$e_2 = 6.11 - (2 \cdot 1.60 + 1.50 + 1.30) = 0.11$$

$$e_3 = 5.73 - (1.60 + 1.50 + 2 \cdot 1.30) = 0.03$$

بعد ذلك نحل المنظومة التي تدعي بمعادلات الاخطاء

Eqs.	x'_1	x'_2	x'_3	e
I	1	2	1	0.10
II	2	1	1	0.11
III	1	1	2	0.03

فنحصل على $x'_3 = -0.03, x'_2 = 0.04, x'_1 = 0.05$ فالجذور المحسنة هي

$$x_1 = 1.60 + 0.05 = 1.65$$

$$x_2 = 1.50 + 0.04 = 1.54$$

$$x_3 = 1.30 - 0.03 = 1.27$$

وهي في هذه الحالة . الجذور الصحيحة للمعادلة الاصلية (a) .

1.9 المصفوفات Matrices

صفيفة array مستطيلة من الارقام ذات m من الاسطرو n من الاعمدة تدعى مصفوفة m

في n وعادة يرمز لها بحرف كبير فالصفيفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة 3×2 -العنصر الواقع في السطر i والعمود j يرمز له بشكل a_{ij} المصفوفة $n \times n$ تدعى بمصفوفة مربعة والعنصر a_{ii} يكون القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة. ان محددة عناصر مصفوفة مربعة A تدعى محددة المصفوفة A وشار لها بالرمز $|A|$ المصفوفة المربعة التي تكون جميع عناصرها الواقعة أسفل قطرها الرئيسي اصفارا تدعى المصفوفة المثلثية العليا بينما المصفوفة التي تكون جميع عناصرها الواقعة فوق قطرها الرئيسي اصفارا وتدعى المصفوفة المثلثية السفلى وشار لها بالحرف L . المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها الواقعة على قطرها الرئيسي هي واحد. بينما عناصرها الواقعة اسفل قطرها اصفارا تدعى بوحدة المصفوفات المثلثية العليا وشار لها بالحرف T . المصفوفة m في 1 تدعى عمودا. المصفوفة التي جميع عناصرها اصفارا تدعى صفر المصفوفات. المصفوفة المربعة التي عناصرها واحد على قطرها الرئيسي بينما بقية عناصرها الاخرى اصفارا تدعى بوحدة المصفوفات وشار لها بالحرف I . تتساوى المصفوفتان A, B في حالة وفي حالة فقط كون أي عنصر a_{ij} في الاولى يساوي نظيره b_{ij} من الثانية والمصفوفة C تسمى مجموع (sum) المصفوفتين A, B اذا كان $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ المصفوفة C (product) حاصل ضرب AB (نتيجة ضرب B المسبق بـ A) اذا كان

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad (1.9.1)$$

حيث n عدد اعمدة A وهي عدد سطور B . ان حاصل الضرب AB نحصل عليه بضرب السطور في الاعمدة وعلى العموم يختلف عن حاصل الضرب BA (اذا كان له وجود). ان حاصل الضرب AB له وجود في حالة كون عدد اعمدة A مساو لعدد السطور B فقط فمثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

AB يساوي

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \\ (1 \cdot 2 + 3 \cdot 1) & (1 \cdot 1 + 3 \cdot 2) & (1 \cdot 1 + 3 \cdot 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} = C. \end{aligned}$$

محددة حاصل ضرب مصفوفتين مربعيتين هو حاصل ضرب محددتي المصفوفتين مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = AB = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix};$$

$$|A| = 3; \quad |B| = -5,$$

وان محددة C تساوي

$$|C| = |A| |B| = (3)(-5) = -15.*$$

بتذكر قاعدة ضرب المصفوفات تستطيع ان ترى ان منظومة ثلاثة معادلات آنية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

يمكن كتابتها على شكل مصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

أو بالشكل المبسط التالي

$$AX = C.$$

المصفوفة $A = [a_{ij}]$ تسمى بمصفوفة المنظومة . والعمود $X = [x_i]$ والعمود $C = [c_i]$ هما عمودي المجاهيل والثوابت على التوالي .

ان الخطوة الاساسية في اية طريقة لحل المعادلات الآنية بطريقة الحذف تتضمن اختزال المنظومة وتحويلها الى الوحدة المثلثية العليا .

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 1 & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix},$$

أو

$$TX = K,$$

(*) انظر Aitken او اي كتاب اخري الجبر العالي للامام بصورة كافية في جبر المصفوفات

حيث ان المنظومة

$$x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 = k_1$$

$$x_2 + t_{23}x_3 = k_2$$

$$x_3 = k_3$$

من الممكن حلها بالتعويض الرجعي (من الاخيرة الى الاولى).

1.10 نهج كولسكي Cholesky's Scheme

ان طريقة كولسكي تصبح ملائمة عند استعمال المصفوفة حيث ان اساسها هو تعيين مصفوفة مساعدة L من نوع المصفوفات المثلثية السفلى قادرة على تحويل المنظومة الاصلية $AX - C = 0$ الى وحدة المصفوفات المثلثية $TX - K = 0$

لهذا الغرض نفرض ان منظومة المعادلات المراد حلها قد اختزلت الى صيغة وحدة المصفوفات المثلثية $TX - K = 0$ وان ضربها بالمصفوفة المثلثية السفلى L سيؤديها الى صيغتها الاصلية

$$L(TX - K) = AX - C = 0.$$

وهذا يتضمن معادلتين بالمصفوفات

$$LT = A; \quad LK = C.$$

ان قاعدة ضرب المصفوفات يمكننا من تعيين K, T, L بطريقة سهلة (*) .
في الواقع عند كتابة هذه المعادلات بشكل صريح واطافة العمود C الى A والعمود K الى T للاقتصاد ، تصبح هذه المعادلات لمنظومة ذات ثلاث معادلات

$$\begin{bmatrix} [A] & [C] \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] \\ l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T] & [K] \\ 1 & t_{12} & t_{13} & k_1 \\ 0 & 1 & t_{23} & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & k_3 \end{bmatrix},$$

(*) استخدم كولسكي هذه الطريقة في فرنسا قبل عام ١٩١٦ فيما يخص النظم المتماثلة ، كما طرحت بصيغة المصفوفة في هولندا من قبل باناجيفكس عام ١٩٣٨ ، واعيد اكتشافها وتكييفها للحسابات المكنة في الولايات المتحدة من قبل كراوت عام ١٩٤١ ، ودرست مرة اخرى في انكلترا من قبل تورنغ عام ١٩٤٨ وتورومول في المانيا عام ١٩٤٩ .

(*) الطريقة استخدمت للحصول على L, T, K تبين ان كلا من هذه المصفوفات الثلاثة هي وحيدة القيمة . حالما نعرف

C, A

ومن هذه يمكن الحصول على معادلات عناصر كل من K, T, L

$$a_{i1} = l_{i1} \times 1 + l_{i2} \times 0 + l_{i3} \times 0 = l_{i1}, \quad (a)$$

أي أن العمود الاول من L مطابق للعمود الاول من A

$$a_{1j} = l_{11}t_{1j} + 0 \times t_{2j} + 0 \times t_{3j} = l_{11}t_{1j} = a_{11}t_{1j}, \quad (b)$$

وان السطر الاول من T يساوي السطر الاول من A مقسوما على a_{11}

$$\begin{aligned} a_{22} &= l_{21}t_{12} + l_{22} \times 1 \quad \therefore \quad l_{22} = a_{22} - l_{21}t_{12} \\ a_{23} &= l_{21}t_{13} + l_{22}t_{23} \quad \therefore \quad t_{23} = (a_{23} - l_{21}t_{13})/l_{22} \\ a_{32} &= l_{31}t_{12} + l_{32} \times 1 \quad \therefore \quad l_{32} = a_{32} - l_{31}t_{12} \\ c_2 &= l_{21}k_1 + l_{22}k_2 \quad \therefore \quad k_2 = (c_2 - l_{21}k_1)/l_{22} \end{aligned} \quad (c)$$

وهكذا. ان عناصر L و T و K تستخرج على التعاقب بهذا الاسلوب بدلالة العناصر السابقة لها متدرجين بصورة افقية من l_{22} .
المعادلات العامة لانجاز الحساب هي

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir}t_{rj}; \quad l_{i1} = a_{i1} \quad (1.10.1)$$

$$t_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} [a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ir}t_{rj}]; \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (1.10.2)$$

للاختصار وضع $a_{i,n+1} = c_i$ و $t_{i,n+1} = k_i$ كما ان $(n+1)$ تشير الى العمود الاخير في المصفوفتين الموسعتين (augmented matrices) $A + L$ و $T + K$ يظهر لنا من المعادلتين (1.10.1) و (1.10.2) انه اذا كان المصفوفة A متماثلة ($a_{ij} = a_{ji}$) فان

$$l_{ij} = t_{ji} \times l_{jj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j), \quad (1.10.3)$$

وعليه فان عناصر L الواقعة اسفل القطر الرئيسي تقتنى كخطوة وسطية عند حساب العناصر

يمكن انجاز العمليات في المعادلتين (1.10.1) و (1.10.2) باستخدام الآلة الحاسبة دون كتابة اي خطوات وسطية. اي ان كل عنصر من l_{ij} و t_{ij} يقتنى في عملية واحدة وهذا ما يجعل طريقة كولسكي من أبسط واسرع الطرق المعروفة من طرق الحذف. اذا ما حسبنا عمليات الضرب والقسمة وتسجيل الارقام فقط. فان طريقة كاوس للحذف

مطبقة على منظومة n من المعادلات تتطلب (عدد من رتبة n^2) $\frac{1}{3}n^3 +$ من العمليات بينما تتطلب طريقة كولسكي (عدد من رتبة n) $n^2 +$ من العمليات وكمثال ذلك عندما $n = 10$ فإن طريقة كاوس تحتاج الى $10^3/3 + 10^2 = 433$ عملية مقاومة بطريقة كولسكي التي تحتاج الى $10 + 10^2 = 110$ عملية فقط.

ان الوقت المستغرق في حل منظومة تتألف من n من المعادلات بطريقة كولسكي على حاسبة منضدية هو من مرتبة $0.001n^4$ ساعة وعليه يمكن حل منظومة عشر معادلات بسهولة في عشر ساعات تقريبا.

ان عدد الارقام الضائعة في الحسابات يختلف من منظومة الى اخرى غير انه . احصائيا يكون من رتبة $0.3n$ وعليه يجب حمل ثلاثة ارقام اضافية ذات دلالة . في منظومة العشر معادلات . اكثر مما يتطلبه الجذر.

في الجدول 1.6 حلت منظومة المعادلات (1.8.1) بطريقة كولسكي كالتالي اكتب عمود L الاول الذي يساوي العمود الاول في المصفوفة $A [2,1,3,1]$ والسطر الاول في المصفوفة الموسعة $T + K$ والذي يساوي السطر الاول في المصفوفة الموسعة $A + C$ مقسوما على $a_{11} = 2$ ولذا يساوي $[1,1,2,-1,5]$ بعد ذلك احسب l_{22} وذلك بان يساوي a_{22} الى حاصل ضرب السطر في العمود للسطر الثاني في L بالعمود الثاني في T

$$3 = 1 \cdot 1 + l_{22} \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \quad \therefore \quad l_{22} = 2,$$

		A				C				L				T				K	
i	j	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6		
		x_1	x_2	x_3	x_4	c	S					x_1	x_2	x_3	x_4	k	S		
1	2	2	4	-2	10	16		2	0	0	0	1	1	2	-1	5	8		
2	1	3	2	1	17	24		1	2	0	0	0	1	0	1	6	8		
3	3	1	3	1	18	26		3	-2	-3	0	0	0	1	-2	-5	-6		
4	1	3	4	2	27	37		1	2	2	5	0	0	0	1	4	5		
5	7	9	13	2	72	S		7	2	-1	5								

جدول (١-٦)

او انك تستطيع ان تجدها مباشرة باستعمال المعادلة (1.10.1) . بعد ذلك احسب t_{23} ، العنصر الاول المجهول في السطر الثاني من المصفوفة T بمساواة a_{23} الى حاصل سرب السطر الثاني من L بالعمود الثالث من T

$$a_{23} = 2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot t_{23} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \quad \therefore \quad t_{23} = 0,$$

ومباشرة باستخدام المعادلة (1.10.2) . احسب t_{24} بنفس الطريقة

$$a_{24} = 1 = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot t_{24} + (\cdot t_{34} + 0 \cdot t_{44} \quad \therefore \quad t_{24} = 1,$$

بعد ذلك احسب $t_{25} = k_2$ كما يلي

$$a_{25} = c_2 = 17 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot t_{25} + 0 \cdot t_{35} + 0 \cdot t_{45} \quad \therefore \quad t_{25} = k_2 = 6.$$

بنفس الاسلوب تحسب عناصر L وعناصر T الاخرى . ان اعمدة التحقيق S يمكن اضافتها الى المصفوفتين الموسعتين $T + K, A + C$ كما يمكن اضافة اسطر تحقيق S' في المصفوفتين A و L . تعامل هذه الاعمدة (والاسطر) كنظائرها في المصفوفات ويتحتم تطابقها مع مجموع العناصر في نفس العمود (او السطر) .

يمكن وضع حقول اضافية C و K عند حل مجموعة من المعادلات لها نفس معاملات المصفوفة ولكنها تختلف في اعمدة الثوابت.

عند هضم طريقة الحل يمكن وضع المصفوفتين L و T بمصفوفة مربعة واحدة وذلك ان عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة T كل منها واحد وهذه تعطي نهج 1.7 المركز.

يمكن الحصول على قيم x_i من النظام المثلثي $TX = K$ وباستخدام التعويض الرجعي فيه (من الاخير الى الاول) كالآتي

Table 1.7
Cholesky's Condensed Scheme

		A				C		L and T				K	
i	j	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
		x_1	x_2	x_3	x_4	c	S	x_1	x_2	x_3	x_4	k	S
1		2	2	4	-2	10	16	2	1	2	-1	5	8
2		1	3	2	1	17	24	1	2	0	1	6	8
3		3	1	3	1	18	26	3	-2	-3	-2	-5	-6
4		1	3	4	2	27	37	1	2	2	5	4	5
5		7	9	13	2	72	S'	7	2	-1	5		

جدول (١-٧) نهج كولسكي المركز

Row 4 $x_4 = 4$

Row 3 $x_3 - 2 \cdot 4 = -5 \quad \therefore x_3 = 3$

Row 2 $x_2 + 0x_3 + x_4 = 6 \quad \therefore x_2 = 2$

Row 1 $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \quad \therefore x_1 = 1.$

Table 1.8
Cholesky's Scheme for Symmetrical Matrices

		A			C	S	L			T			K	S
i \ j	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5	
1	2	2	4	8	16	2	0	0	1	1	2	4	8	
2	2	1	2	5	10	2	-1	0	0	1	2	3	6	
3	4	2	3	9	18	4	-2	-1	0	0	1	1	2	
4	8	5	9	22	S'	8	-3	-1						

جدول (١-٨) نهج كولسكي للمصفوفات المائلة

$$\begin{aligned}
(1) \quad l_{22} &= 1 - 2 = -1; \\
(2) \quad l_{23} &= (2 - 2 \cdot 2)/(-1) = -2/-1 = l_{32}/-1 = 2; \\
(3) \quad l_{24} &= (5 - 2 \cdot 4)/(-1) = l_{42}/-1 = 3; \\
(3a) \quad l_{25} &= (10 - 2 \cdot 8)/(-1) = 6; \\
(4) \quad l_{32} &= -2; \\
(4a) \quad l_{42} &= -3; \\
(5) \quad l_{33} &= 3 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = -1; \\
(6) \quad l_{34} &= (9 - 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3)/(-1) = l_{43}/-1 = 1; \\
(6a) \quad l_{35} &= (18 - 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6)/(-1) = 2. \\
x_3 &= 1; \quad x_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1; \quad x_1 = 4 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

يوضح الجدول 1.8 حل منظومة ثلاثة معادلات متماثلة مبسطة باستعمال المعادلة (1.10.3)

1.11 معكوسة المصفوفة *The Inverse of a Matrix*

المصفوفة المربعة من رتبة n التي قطرها الرئيسي واحد وباقي عناصرها اصفار تدعى مصفوفة المطابقة ويرمز لها بالحرف I

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11.1)$$

يقال ان المصفوفة A^{-1} هي معكوسة المصفوفة A اذا تحقق

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \quad (1.11.2)$$

نرمز لعناصر A^{-1} بـ b_{ij} . من المعادلة (1.11.2) يظهر لنا ان b_{ij} هي جذور لـ n من المنظومات الحاوية على n من المعادلات التي معاملاتها هي a_{ij} وحدودها الثابتة c_i تساوي

$$1, 0, 0, 0, \dots; \quad 0, 1, 0, 0, \dots; \quad 0, 0, 1, 0, \dots; \quad \dots \quad (1.11.3)$$

لنظومة ثلاثة معادلات . مثلاً تصبح المعادلة (1.11.2)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذه تعطي ثلاثة بمنظومات تتألف كل منها من ثلاث معادلات هي

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1,$$

$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0,$$

$$a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 0;$$

$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 0,$$

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 1,$$

$$a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 0;$$

$$a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 0,$$

$$a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 0,$$

$$a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 1.$$

وبذلك يصبح سهلا علينا حساب b_{ij} بطريقة الحذف مستخدمين n من مجموعات الثوابت التي على نمط المعادلة (1.11.3).

ان النهج التالي يوضح لنا طريقة الحذف في عكس مصفوفة 3 في 3 . السطور التسعة الاولى في النهج تختزل المصفوفة 4 الى مصفوفة مثلثية . وتحذف السطور الثلاثة الباقية المجهولين x_2, x_3 من المعادلات (4) , (7) , (9) حتى نحصل في المعادلات (12) , (11) , (9) على القيم b_{3j}, b_{2j}, b_{1j} على التوالي . لاحظ ان الحل ابداً بوحدة المصفوفات b_{ij} وانتهى بوحدة المصفوفات a_{ij}

[A]				[A ⁻¹]			Expl.	j
	a_{1j}	a_{2j}	a_{3j}	b_{1j}	b_{2j}	b_{3j}		
1	2	1	1	1	0	0		
2	1	3	1	0	1	0		
3	1	1	4	0	0	1		
4	1	1/2	1/2	1/2	0	0	(1/2)(1)	
5	0	5/2	1/2	-1/2	1	0	(2) - (4)	
6	0	1/2	7/2	-1/2	0	1	(3) - (4)	
7	0	1	1/5	-1/5	2/5	0	(2/5)(5)	
8	0	0	17/5	-2/5	-1/5	1	-(1/2)(7) + (6)	
9	0	0	1	-2/17	-1/17	5/17	(5/17)(8)	3
10	1	1/2	0	19/34	1/34	-5/34	-(1/2)(9) + (4)	
11	0	1	0	-3/17	7/17	-1/17	-(1/5)(9) + (7)	2
12	1	0	0	11/17	-3/17	-2/17	-(1/2)(11) + (10)	1

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{17} & -\frac{3}{17} & -\frac{2}{17} \\ -\frac{3}{17} & \frac{7}{17} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{2}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{5}{17} \end{bmatrix}$$

ان معرفة A^{-1} ضرورية حيشما وجب حل منظومة تتكون من n من المعادلات لمجموعة من الثوابت ($n \ll m$) حيث الجذور x_j المناظرة لمجموعة الثوابت c_i معطاة كالتالى

$$x_j = c_1 b_{j1} + c_2 b_{j2} + \dots + c_n b_{jn}. \quad (1.11.4)$$

وعليه يكون الجذر x_2 للمنظومة

$$AX = C; \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

حيث A هي المصفوفة التي استعملت في المثال السابق .

$$x_2 = 3\left(-\frac{3}{17}\right) - 2\left(\frac{7}{17}\right) - 6\left(-\frac{1}{17}\right) = -\frac{17}{17} = -1$$

1.12 طريقة المعاودة لكاوس - سايدل

The Gauss-Seidel Iteration Method

تسمى منظومة المعادلات الخطية بالقطرية اذا كان معامل مجهول مختلف في كل معادلة اكبر بالقيمة المطلقة من مجموع القيم المطلقة للمعاملات الاخرى . يقع المعامل الكبيرة عادة على القطر الرئيسي اي a_{ii} . ان معظم المنظومات الناتجة من المسائل الفيزيائية تكون من النوع القطري .

ان للمنظومات القطرية خاصية اساسية وهي قابليتها للحل بطرق التقريب المتعاقب حيث تتميز طريقة المعادة لكاوس - سايدل عن بقية هذه الطرق ببساطتها .

عند تطبيق طريقة كاوس - سايدل لحل كل معادلة للمجهول ذي المعامل الاكبر فيها

[illegible]

ثم يعوض بالطرف الايمن للمعادلة (1.12.1) اية قيمة مبدئية (تخمينية) $x_j^{(0)}$ للمجاهيل وبذلك تقتنى قيم جديدة $x_j^{(1)}$ في الطرف الايسر .

ثم نعوض القيم الجديدة $x_j^{(1)}$ بالطرف الايمن في المعادلات وتقتنى قيم اخرى محسنة $x_j^{(2)}$ ويتوالى هذا النمط الى ان تتساوى $x_j^{(m)}$ مع $x_j^{(m+1)}$ للدرجة المطلوبة من الدقة فتكون $x_j^{(m)}$ عندئذ هي جذر المنظومة .

ان كل تقرب لجذر يحصل عليه بطريقة كاوس بعملية منفردة بالالة الحاسبة ولا تؤثر الاجطاء على اتمام الحل . حيث انها تعادل مجموعة جديدة من القيم الابتدائية . لان الطريقة ان كانت ملزمة (convergence) تلتزم مهما كانت قيم الابتداء . اذا اخذنا التقريب الاخير للمجهول وعوضناه في الطرف الايمن من المعادلة (1.12.1) كما اقترح سايدل . فان سرعة التقارب تزداد بصورة كبيرة . ان اي حدس من شأنه تعجيل الانتهاء مسموح به في اي مرحلة من العملية .
خذ المنظومة التالية كمثال في تطبيق طريقة كاوس - سايدل للمعاودة .

Eqs.	x_1	x_2	x_3	c_i
I	10	1	1	12
II	2	10	1	13
III	2	2	10	14

(a)

والتي عندما تكون جاهزة للمعاودة بالصيغة (1.12.1) تصبح

$$x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3;$$

$$x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3;$$

$$x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2.$$

انطلاقاً بالقيم $x_2 = x_3 = 0$ فان المعادلة الاولى تعطي $x_1 = 1.2$ وبأخذ

$x_3 = 0, x_1 = 1.2$ تعطي المعادلة الثانية $x_2 = 1.3 - 0.2 \cdot 1.2 = 1.06$ وبأخذ

$x_2 = 1.06, x_1 = 1.2$ تعطي المعادلة الثالثة

$$x_3 = 1.40 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.2 \cdot 1.06 = 0.95$$

$x_1 = 0.99$ وبمعاودة العملية نحصل على النتائج الموجودة في الجدول 1.9

جدول (۹-۱)

n	1	2	3	4
x_1	1.20	0.99	1.00	1.00
x_2	1.06	1.00	1.00	
x_3	0.95	1.00	1.00	

جدول (۱۰-۱)

	I	II	III
x_1	1	-0.2	-0.2
x_2	-0.1	1	-0.2
x_3	-0.1	-0.1	1
k	1.20	1.30	1.40
	(1.20)	-0.24	-0.24
	-0.11	(1.06)	-0.24
	-0.10	-0.10	(0.95)
	(0.99)	-0.20	-0.20
	-0.10	(1.00)	-0.20
	-0.10	-0.10	(1.00)
	(1.00)	-0.20	-0.20
	-0.10	(1.00)	-0.20
	-0.10	-0.10	(1.00)
	(1.00)		

عندما يكون انجاز العمليات بالمسطرة الحاسبة يفضل ان ترتب كما في الجدول (1.10) حيث كتبت المعادلة (a) بصورة عمودية . من الواضح ان العمليات المشمولة بالمعادلة قابلة للتمثيل بصيغة مصفوفة . ان حل المعادلة بطريقة كاوس ، مثلاً ينص على

$$x_1^{(i+1)} = k_1 - b_{12}x_2^{(i)} - b_{13}x_3^{(i)} - \dots - b_{1n}x_n^{(i)}$$

$$x_2^{(i+1)} = k_2 - b_{21}x_1^{(i)} - b_{23}x_3^{(i)} - \dots - b_{2n}x_n^{(i)}$$

.....

$$x_n^{(i+1)} = k_n - b_{n1}x_1^{(i)} - b_{n2}x_2^{(i)} - \dots - b_{n,n-1}x_{n-1}^{(i)}$$

$$X^{(i+1)} = K + BX^{(i)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -b_{12} & -b_{13} & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & 0 & -b_{22} & \dots & -b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \dots & -b_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

1.13 حل المعادلات الخطية بطريقة الارخاء

Solution of Linear Equations by Relaxation

تشتمل هذه الطريقة في حل المعادلات الخطية على عمليات تقريبية متعاقبة حيث يتمكن الحاسب من استخدام مهارته وبديته الرياضية بطرق متنوعة غير محدودة لتعجيل التمام النهج نحو الجواب الصحيح . ويعود اسم الارخاء وشيوعه الى جهود ساوثويل Southwell ومدرسته* خذ المعادلات التالية التي فيها القطر الرئيسي للمعاملات يساوي (-1) الثوابت k في الطرف الايسر من المعادلات

$$\begin{aligned} -x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n + k_1 &= 0 \\ b_{21}x_1 - x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n + k_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.13.1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \dots - x_n + k_n = 0$$

ارمز بـ R_i (البواقي) لقيمة الطرف الايسر في المعادلة (i) لمجموعة مفترضة $x_j^{(0)}$ من قيم الانطلاق

$$\begin{aligned} -x_1^{(0)} + b_{12}x_2^{(0)} + b_{13}x_3^{(0)} + \dots + b_{1n}x_n^{(0)} + k_1 &= R_1 \\ b_{21}x_1^{(0)} - x_2^{(0)} + b_{23}x_3^{(0)} + \dots + b_{2n}x_n^{(0)} + k_2 &= R_2 \\ \dots \dots \dots \\ b_{n1}x_1^{(0)} + b_{n2}x_2^{(0)} + b_{n3}x_3^{(0)} + \dots - x_n^{(0)} + k_n &= R_n. \end{aligned} \quad (1.13.2)$$

تتطلب طريقة الارخاء تغيير قيم الانطلاق ، منفردة او عدة قيم مرة واحدة ، حتى تكون جميع R_i صغيرة لدرجة من الممكن اهمالها .

* انظر R. V. Southwell طريقة الارخاء في الفيزياء النظرية جامعة اكسفورد ١٩٤٦ كذلك طريقة الارخاء في العلوم الهندسية جامعة اكسفورد ولندن ١٩٤٠ كذلك D. N. de G. Allen طريقة الارخاء مكروهل نيسورنك

« لهذا الغرض » لاحظ مثلا انه لو تغير احد المجاهيل $x_j^{(0)}$ ، ولنقل $x_k^{(0)}$ بمقدار δx_k فان R_k يتغير بمقدار $(-\delta x_k)$ بينما تتغير القيم الاخرى من R_i بمقدار $b_{ik}\delta x_k$. لكي نختزل قيمة R_i ، ولنقل R_k ، الى الصفر فاننا نغير $x_k^{(0)}$ بالمقدار $\delta x_k = R_k$ وبهذه العملية تتغير قيم البواقي الاخرى ويتحتم اختزالها الى الصفر واحد بواحد بتغيرات مناسبة δx_i ومن الملائم ان يختزل اكبر باقي يظهر عند أي خطوة في النهج .

وتمارس هذه العملية للسهولة في صيغة جدول بكتابة قيمة الابتداء لكل مجهول $x_j^{(0)}$ والتغيرات المتعاقبة فيه في عمود وكتابة البواقي في عمود اخر . (يكون الى يمين عمود δx_j عادة) ، ولذلك فان لكل مجهول عمودان في جدول الارحاء . عندما تتلاشى البواقي للدرجة المطلوبة من (الدقة) يعطي مجموع $x_j^{(0)}$ وجميع التغيرات δx_j قيمة المجهول x_j .
خذ على سبيل المثال النظام التالي :

Eqs.	x_1	x_2	x_3	c
I	10	-2	-2	6
II	-1	10	-2	7
III	-1	-1	10	8

(a)

التي تكون جاهزة للارحاء [المعادلة (1.13.1)] بالصيغة : -

Eqs.	x_1	x_2	x_3	k
I	-1	0.2	0.2	0.6
II	0.1	-1	0.2	0.7
III	0.1	0.1	-1	0.8

(b)

باستعمال قيم الانطلاق $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ ، تكون البواقي المناظرة

$$R_1 = 0.60; \quad R_2 = 0.70; \quad R_3 = 0.80.$$

تظهر قيم الانطلاق الاولى $x_j^{(0)}$ والبواقي في الاعمدة R_i, x_j على التوالي في السطر الاول من جدول (1.11) . ان اعظم باق هو $R_3 = 0.80$ وهو الذي يختزل اولاً الى الصفر بتغيير $\delta x_3 = 0.80$ وهذا بدوره يدخل تغييرا $b_{23}\delta x_3 = 0.2 \cdot 0.80 = 0.16$ في R_2

كما يدخل تغييرا $b_{13}\delta x_3 = 0.2 \cdot 0.80 = 0.16$ في R_1

وعندئذ تصبح البواقي الجديدة

$$R_1 = 0.60 + 0.16 = 0.76$$

$$R_2 = 0.70 + 0.16 = 0.86$$

$$R_3 = 0.80 - 0.80 = 0.$$

يمحى الآن اكبر باق $R_2 = 0.86$ بتغير $\delta x_2 = 0.86$ والذي بدوره يدخل التغييرات

$$\delta R_3 = b_{32}\delta x_2 = 0.1 \cdot 0.86 = 0.09$$

$$\delta R_1 = b_{12}\delta x_2 = 0.2 \cdot 0.86 = 0.17.$$

والبواقي عند هذه المرحلة هي

$$R_1 = 0.76 + 0.17 = 0.93$$

$$R_2 = 0$$

$$R_3 = 0 + 0.09 = 0.09.$$

نعيد العملية على R_1 الذي هو اكبر البواقي بتغير $\delta x_1 = 0.93$ والذي يدخل هو الآخر

التغييرات

$$\delta R_2 = b_{21}\delta x_1 = 0.1 \cdot 0.93 = 0.09$$

$$\delta R_3 = b_{31}\delta x_1 = 0.1 \cdot 0.93 = 0.09.$$

تكرر العملية الى ان يتم اختزال البواقي الى وحدة واحدة في اخر رقم ذي دلالة

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	0.60 0.16	0	0.70 0.16	0 0.80	0.80 -0.80
0.93	0.76 0.17	0.86	0.86 -0.86	0.18	0 0.09
	0.93 -0.93	0.13	0 0.09		0.09 0.09
	0 0.04		0.09 0.04		0.18 -0.18
	0.04 0.03		0.13 -0.13		0 0.01
0.07	0.07 -0.07	0.01	0 0.01	0.02	0.01 0.01
	0 0		0.01 0		0.02 -0.02
	0 0		0.01 -0.01		0 0
	0		0		0
1.00	0	1.00	0	1.00	0

جدول (١١-١)

وتكون قيمة x_j هي مجموع الارقام في عمود x_j

$$x_1 = 0.93 + 0.07 = 1.00;$$

$$x_2 = 0.86 + 0.13 + 0.01 = 1.00;$$

$$x_3 = 0.80 + 0.18 + 0.02 = 1.00.$$

يجب ان يتحقق الشخص من النتائج التي يحصل عليها وذلك بتعويضها بالمعادلة الاصلية . من الناحية العملية تضاف التغييرات الى البواقي مباشرة دون كتابتها وعندئذ يتخذ النهج الشكل المضغوط (المكبوس) للجدول 1.12 حيث ضربت جميع الارقام في (100) للتخلص من الفارزة العشرية

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	80	0	70	0	80
	76	86	86	80	9
93	93		9	18	18
	4	13	13		1
7	7	1	1	2	2
100		100		100	

جدول (١٢-١)

لأجل ان تبين خواص متميزة اخرى لطريقة الارخاء سنحل المنظومة التالية (c) الجاهزة للارخاء والتي تمثل مشكلة فيزيائية سنتعامل فيها بالفصل الرابع انظر الصفحة 19 وما يليها).

v_1	v_2	v_3	k
-1	0.3951	0	0.2695
0.3556	-1	0.3556	0.4763
0	0.3232	-1	1.0717

(c)

ندور المعاملات b_{ij} في التقريب الاول لرقم اوزقمين لان الخطأ الناتج من التدوير يمكن محيه دائما بارخاء البواقي الاكثر دقة المحسوبة من المعاملات غير المدورة . ولذلك

فان المعاملات والنوابت في (c) تدور الى رقمين للحصول على دقة ١٪ ، وستعمل جدول الارخاء :

v_1	v_2	v_3	k	B
-1	0.40	0	0.27	-0.60
0.36	-1	0.36	0.48	-0.28
0	0.32	-1	1.07	-0.68

(d)

ان قيم الانطلاق المفروضة هي

$$v_1^{(0)} = 0.25; \quad v_2^{(0)} = 0.50; \quad v_3^{(0)} = 0.75.$$

i.13

v_1	R_1	v_2	R_2	v_3	R_3
25	22	50	34	75	48
42	42	51	51	48	16
8	8	21	18	16	7
2	2	5	2	7	2
1	1	2	3	2	1
78			8	1	
			1	149	
			2		
		129			

جدول (١٣-١)

وان البواقي $v_j^{(0)}$ هي :

$$R_1 = -0.25 + 0.40 \cdot 0.50 + 0.27 = 0.22;$$

$$R_2 = 0.36 \cdot 0.25 - 0.50 + 0.36 \cdot 0.75 + 0.48 = 0.34;$$

$$R_3 = 0.32 \cdot 0.50 - 0.75 + 1.07 = 0.48.$$

يعطي الجدول 1.13 حل المنظومة بارخاء اكبر باق في كل خطوة.

ان الجدول 1.14 يبين كيفية الحصول على رقمين اضافيين في v_j بحساب البواقي المناظرة للقيم اعلاه من المعاملات الكاملة (غير المدورة) للمنظومة (c) ثم ارخائها بمعاملات (d) المدورة ، حيث يمحي اكبر باق في كل خطوة . ان كلا من البواقي والمجاهيل مضروبة في 10^4 لتلافي الفارزة العشرية .

v_1	R_1	v_2	R_2	v_3	R_3
7800	-8	12900	-65	14900	-14
-34	-24	-65	-12	-35	-35
-9	-8	-24	-24	-8	-8
-2	-2	-6	-8	-2	-2
-1	1	-2	-8	1	-1
7754			-1	14854	
		12803	-2		

جدول (١٤-١)

طبقت طريقة الارخاء في الامثلة السابقة بصورة ميكانيكية بحيث ان الباقي الكبير يؤول دائماً الى الصفر . غير ان الطريقة تصبح متميزة الفائدة فيما اذا لم تستعمل قاعدة كهذه في الحل . في الارخاء الكتلي (block relaxation) مثلاً . تغير جميع (أو مجموعة من) المتغيرات بنفس الكمية δ كلما كان ذلك ملائماً . وبذلك يتغير الباقي بالمقدار .

$$\delta R_i = (-1 + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij})\delta = B_i\delta, \quad (1.13.3)$$

بينما تكون التغيرات في الارخاء الزاهد (underrelaxation) والارخاء المفرط (overrelaxation) من الصغر أو الكبر بحيث تعطي بواق جديدة بنفس أو عكس اشارة البواق السابقة على التوالي .

يبين الجدول 1.15 حل منظومة المعاملات (c) . حيث

$$B_1 = -1 + 0.40 = -0.60,$$

$$B_2 = 0.36 - 1.00 + 0.36 = -0.28,$$

$$B_3 = 0.32 - 1 = -0.68,$$

لدقة ١٪ أولاً بواسطة تغيير كتلي اولي مقداره +0.60 وارخاء مفرط متعاقب . واقتنى بعدئذ رقمان اضافيان في الجذور بالارخاء البسيط .

ان السطرين الاخيرين يحتويان على البواق المحسوبة من المعاملات الكاملة للمعاملات (c) وكذلك القيم النهائية .

v_1	R_1	v_2	R_2	v_3	R_3	Explanations
25	22	50	34	75	48	$v_i^{(0)}$ and $R_i^{(0)}$ of Eqs. (d)
60	-14	60	17	60	7	Block change $\delta = 60$
-7	-8 1	20	-3 2	15 -2	18 -2	Overrelaxation
78		130	-1	148		Roots to 1 per cent
7800	21	13000	-200	14800	119	Residuals of Eqs. (e)
-49	-49	-200	20	55	55	Simple relaxation
1	1	2	2	1	1	
7752	1	12802	0	14856	1	Roots to 0.01 per cent and check of residuals
1				-1		Simple relaxation
7753		12802		14855		Final values of roots

جدول (١-١٥)

ان من أكفا طرق استعمال الارخاء الكتلي هي اختزال الباقي الكلي ، أي مجموع كل R_i الى صفر ، مثلاً في جدول 1.16 فان حل المعاملات في المنظومة (e) يبدأ بتغيركتلي أولي يساوي سالب نسبة الباقي الكلي $-67 = -(4 + 18 + 45)$ الى معامل الارخاء B الكلي $-21 = -6 - 7 - 8$ ، أي $\delta x = -67 / -21 \approx 3$ وان البواقي δR_i المناظرة لها هي $\delta R_1 = 3(-6) = -18$; $\delta R_2 = 3(-7) = -21$; $\delta R_3 = 3(-8) = -24$.

ان لمجموعة البواقي الجديدة ($R_1 = -14$, $R_2 = -3$, $R_3 = 21$) اشارات متناوبة وهي صفة تعجيل الالتئام .
وان تكملة الحل يتم بارخاء الباقي الاكبر

x_1	x_2	x_3	k	B
-10	2	2	4	-6
1	-10	2	18	-7
1	1	-10	45	-8
			67	-21

(e)

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	4	0	18	0	48
3	-14	3	-8	3	24
-1	-18		1	2	1
	0		0		0
2		3		5	

جدول (١٦-١)

ان المهارة المكتسبة بحل عدد من المنظومات وكذلك قدرا من التبصر (البداية) بالمسألة سيوحيان عادة بالتغيرات التي تقود الى الجذور الصحيحة في بضعة دورات. ومن الضروري اجتياز العملية باختيار قيم δx المناسبة عوضا عن محاولة محي البواقي بالضبط.

ان المبتدئين يميلون الى اختزال باق معين R_i الى الصفر واختيار δx_i التي تحقق هذه النتيجة غير انه من الاكثر ملائمة ان يتم اختيار δx_i بأرقام مدورة ثم حساب δR_i المناظرة.

1.14 مجاميع غير منتهية من المعادلات

Sets of Infinite Equations

عند حل العديد من المشاكل التقنية قد تحتاج الى تقييم جذور مجموعة غير منتهية من المعادلات الخطية. وهذه تتبع عادة من طرق التقريب المتعاقب وتقود الى جذور x_j متناقصة القيمة المطلقة مع ازدياد j . ولادراك اتجاه قيم المجاهيل يمكن اتباع الطريقة الاولى التالية. خذ اول n من معادلات المنظومة وثلاثها بالتعويض. ثم حل ، على التعاقب ، المعادلة الاولى بالنسبة الى x_1 ثم المعادلة الاولى والثانية بالنسبة الى x_2, x_1 ثم المعادلة الاولى والثانية والثالثة الى x_3, x_2, x_1 وهكذا مع تجاهل المجاهيل الاخرى. بهذا نحصل على n من التقريبات للمجهول x وهكذا. ومن هذه القيم نستطيع ان نقيس تأثير المجاهيل الباقية على بضعة من المجاهيل الاولى. ان هذه الطريقة طبقت على المنظومة

$$-x_{j-1} + (j+1)x_j - x_{j+1} = 10; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (x_0 = 0), \quad (a)$$

باخذ المعادلات الستة الاولى فقط

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	C	Row	Expl.
2	-1	-1				10	1	I
-1	3	-1				10	2	II
	-1	4	-1			10	3	III
		-1	5	-1		10	4	IV
			-1	6	-1	10	5	V
				-1	7	10	6	VI
2	-1	-2				10	7	(1)
	5	18	-5			30	8	2(2) + (7)
			85	-18		80	9	5(3) + (8)
				492	-85	260	10	18(4) + (9)
					3359	1110	11	85(5) + (10)
						6030	12	492(6) + (11)
5.00							13	
8.00	6.00						14	
8.89	7.78	4.44					15	
9.06	8.12	5.29	3.06				16	
9.09	8.17	5.43	3.54	2.26			17	
9.09	8.18	5.44	3.60	2.57	1.80		18	

1.15 توافم المعادلات

Consistency of Equations

(هي المعادلات التي شروط حلها متوفرة أو مكتملة)

يقال ان المصفوفة $m \times n$ من رتبة r اذا كانت اكبر محددة لاصفوية لصغير محدد (minor) يمكن الحصول عليها من المصفوفة من رتبة r فمثلا المصفوفة 2×3 .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

سطين وثلاثة اعمدة هو من مرتبة واحد لان صغارها

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(minors) المستخلصة منه والتي من رتبة اثنين تساوي صفرا . لكن ليس جميع

عناصرها (صغارها من رتبة واحد) هي اصفار.

سوف ندرج هنا النظرية الأساسية لتوافق المعادلات الخطية بدون اعطاء البرهان لها.

المنظومة التي تتكون من m من المعادلات بـ n من المجاهيل يكون لها حل في حالة وفي حالة فقط ماذا كانت المصفوفة A المشكلة من المعاملات والمصفوفة المزيـدة (*augmented matrix*) B (المتكونة من اضافة عمود الثوابت الى مصفوفة المعاملات من رتبة واحدة) مثلا المنظومة التالية

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 20 \end{aligned} \quad (a)$$

متوائمة لان كلا من B, A من رتبة واحد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 20 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \text{ان نفس المنظومة مع عمود ثوابت}$$

غير متوائمة . لان المصفوف المزيـد

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

رتبة (2) كما هو مبين في صغير المحدد ادناه

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

عندما يكون عدد المجاهيل n اكبر من الرتبة r . فمن الممكن التعبير عن r من المجاهيل بدلالة المجاهيل $n - r$ الباقية . مثلا .

$$x_1 = 10 - 2x_2 - 3x_3$$

تحقق كلا من المعادلتين في (a) بصورة متطابقة ومهما كانت قيمة x_2 و x_3 وفي الواقع ان لهذه المنظومة مالا نهاية مزدوجة من الحلول . بالمثل . المنظومة

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 = 15$$

$$2x_1 + 5x_2 = 25$$

لها المصفوفات التالية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 15 \\ 2 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

من رتبة (2) وجذور (تقتنى بحل أية معادلتين من المنظومة بصورة آتية)

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 5,$$

التي تحقق المعادلات الثلاثة كلها. وهو حل وحيد unique لأن $n = r = 2$

1.16 المعادلات المتجانسة Homogeneous Equations

ان المنظومة المتكونة من n من المعادلات الخطية و n من المجاهيل والتي تكون فيها جميع الثوابت c_i اصفارا. اي منظومة متجانسة. لها حل دائما. حيث ان مصفوفتها المربعة. بالضرورة من نفس رتبة مصفوفة معاملاتها. يدعى هذا الحل حل الصفر (zero solution) او الحل بسيط (trivial solution) وهو عبارة عن x_j كلها تساوي صفرا.

يكون لهذه المعادلات حل غير بسيط (nontrivial). (اي الحل الذي يختلف عن الصفر) في حالة وفي حالة فقط عندما تكون رتبة مصفوفة المعاملات r اصغر من n مثلا المنظومة

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad (a)$$

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

لها مصفوف معاملات من رتبة (2) وجذور

$$x_1 = x_3; \quad x_2 = -x_3; \quad x_3 = \text{اختياري}$$

أي ان

$$\frac{x_1}{x_3} = 1; \quad \frac{x_2}{x_3} = -1.$$

في كثير من مسائل الاهتزازات وعدم الاستقرار (instability) تعتمد معاملات منظومة

المعادلات الخطية المتجانسة على وسيط λ . وتوجد الحلول غير البسيطة لها (غير الصفريّة) بإيجاد قيم λ . وتدعى بالقيم المميزة . التي تجعل رتبة مصفوف المعاملات تساوي $(n - 1)$ مثلا

$$\begin{aligned} (2 - \lambda)x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + (2 - \lambda)x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (b)$$

ان قيم λ التي تجعل محدد العوامل يساوي صفرا نستخرج من المعادلة

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0,$$

ومنها

$$\lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = 1.$$

وتصبح منظومة المعادلات المناظرة

$$\begin{aligned} \lambda = 3 & & \lambda = 1 \\ -x_1 + x_2 = 0 & & x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 & & x_1 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

والتي جذورها هي (موجّهات مميزة)

$$x_1 = x_2; \quad x_1 = -x_2.$$

يمكن الان نعين الشرط الضروري والكافي (necessary and sufficient) لحل المعادلات الخطية بالمعادلة بدلالة الوسيط λ . يلثم نسق المعادة حيثما كانت القيم المميزة لمصفوفة المعادة B اقل من 1 في القيمة المطلقة.

ان حل المنظومة (b) لأكبر قيمة مميزة ونظيرها الموجه المميز ، يمكن الحصول عليه بالمعادلة بان نحزرمميزا .مثلا عند المنظومة (b) كالتالي :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

وافترض $x_1 = 2, x_2 = 1$ تعطي المعادلات المتعاقبة

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{4} \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix} = \frac{13}{4} \begin{bmatrix} \frac{14}{13} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{14}{13} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{41}{13} \\ \frac{40}{13} \end{bmatrix} = \frac{40}{13} \begin{bmatrix} \frac{41}{40} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{41}{40} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{122}{40} \\ \frac{121}{40} \end{bmatrix} = \frac{121}{40} \begin{bmatrix} \frac{122}{121} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ان المتجهات المميزة تعرف ضمن ثابت حيث جرت العادة على ان يؤخذ الواحد كعنصر من عناصره
ان التقريب الاخير يعطي

$$\lambda = \frac{121}{40} = 3.025; \quad x_1 = \frac{122}{121} = 1.008; \quad x_2 = 1.$$

1.17 المعادلات الآتية اللاخطية *Simultaneous Nonlinear Equations*

لأنوجد طرق عامة لحل المعادلات الآتية اللاخطية . نستخرج القيم الأولية للمجاهيل عادة بطريقة التجربة والخطأ . او بطريقة الرسم ثم يكمل الحل باستخدام طريقة المماس لنيوتن بشرط ان القيم الأولية قريبة لدرجة ما للجذور.
مثلا لو اعطينا المعادلتين غير الخطيتين التاليتين

$$f(x,y) = 0; \quad \phi(x,y) = 0, \quad (1.17.1)$$

وعرفنا ان التقريب الاول هو (x_0, y_0) نفك الدالتين f و ϕ بمتسلسلة تيلر حول النقطة (x_0, y_0) اخذين الحدود الخطية

$$f(x,y) = f_0 + f_{x,0}h + f_{y,0}k + \dots = 0$$

$$\phi(x,y) = \phi_0 + \phi_{x,0}h + \phi_{y,0}k + \dots = 0 \quad (a)$$

حيث

$$f_{x,0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}; \quad \dots; \quad (b)$$

$$h = x - x_0; \quad k = y - y_0. \quad .$$

بحل المعادلتين الخطيتين في (a) بدلالة k, h نحصل

$$\begin{aligned} h &= - \frac{f_0 \phi_{y,0} - \phi_0 f_{y,0}}{f_{x,0} \phi_{y,0} - \phi_{x,0} f_{y,0}} \\ k &= - \frac{f_{x,0} \phi_0 - \phi_{x,0} f_0}{f_{x,0} \phi_{y,0} - \phi_{x,0} f_{y,0}} \end{aligned} \quad (1.17.2)$$

المعادلات (b) تعطي التقريب الاول

$$x_1 = x_0 + h; \quad y_1 = y_0 + k. \quad (1.17.3)$$

ان تمديد الطريقة لاكثر من معادلتين هو مباشر . مثلا . لو اعطينا

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 - y^2 - 1 = 0; & \phi(x,y) &= x + y^3 + 2 = 0; \\ f_x &= 2x, & f_y &= -2y; & \phi_x &= 1, & \phi_y &= 3y^2, \end{aligned}$$

وانطلاقا من $y_0 = -0.5, x_0 = -1$ نحصل على ماييلي (صحيحة لرقمين عشرين) .

n	0	1	2	3	4
x	-1.00	-1.43	-1.34	-1.33	-1.33
y	-0.50	-1.10	-0.92	-0.88	-0.88
f	-0.25	-0.17	-0.051	-0.0055	
f_x	-2.00	-2.86	-2.64	-2.66	
f_y	1.00	2.20	1.84	1.76	
ϕ	0.88	-0.76	-0.12	-0.0115	
ϕ_x	1.00	1.00	1.00	1.00	
ϕ_y	0.75	3.63	2.55	2.32	
h	-0.43	0.09	0.01	0	
k	-0.60	0.18	0.04	0.0046	

1.18 البرمجة الخطية Linear Programming

البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي لحل مسائل مهمة تقنية او مالية او تنظيمية والتي يجب اختيار عدد من المتغيرات فيها بحيث تجعل قيمة دالة خطية مافي هذه المتغيرات في قيمتها العظمى او الصغرى ، وفي نفس الوقت نحقق بعض معادلات او متباينات خطية ، يشار اليها عادة بالمقيدات (constraints) . ادناه مسألة برمجة خطية نمطية .

نفرض ان معملاً ينتج نوعين من المنتجات نوع A يتطلب ساعة من الحرق في الفرن وثلاث ساعات تصنيع ، بينما يتطلب النوع B ساعتين من الحرق واربع ساعات تصنيع . المصنع يربح (1) دينار لكل قطعة من A ويربح (3) دنانير عن كل قطعة من النوع B . يمكن للمعمل ان يضع 10 العمال في التصنيع يعمل كل منهم نوبة نظامية من (8) ساعات . كما ان فيه فرنا واحدا يشتغل (24) ساعة في اليوم للاقتصاد في الوقود . كم قطعة يصنع من النوع A وكم قطعة يصنع من النوع B حتى يكون ربحه اعظم مايمكن .

لنجعل x_1 , x_2 يشيران الى عدد القطع A , B على التوالي التي تعطي اكبر ربح . ان التصنيع محدود بعدد الساعة - رجل المتوفرة (10) عمال يشتغل كل منهم 8 ساعات بحيث

$$3x_1 + 4x_2 \leq 80. \quad (a)$$

من ناحية اخرى انه يتطلب اشتغال الفرن (24) ساعة كون

$$x_1 + 2x_2 = 24. \quad (b)$$

ليكن p_1 ربح القطعة من النوع A و p_2 ربح القطعة من النوع B ولذلك فان الربح اليومي يعطي بدالة خطية في x_1 , x_2

$$P = p_1x_1 + p_2x_2 = x_1 + 3x_2. \quad (c)$$

قد نحاول ان نجد حلا لهذه المسألة باستخدام كل القوى العاملة المتوفرة في التصنيع ، اي بحل هاتين المعادلتين

$$3x_1 + 4x_2 = 80$$

$$x_1 + 2x_2 = 24.$$

ومنهما نحصل على $x_1 = 32$ ، $x_2 = -4$. وحيث ان من المستحيل انتاج عدد سالب من القطع B ، فعليه يكون هذا الحل لاعمى له ، اي ان العمل لا يستطيع استخدام 80 ساعة - رجل في التصنيع . الحل يتم بايجاد قيم غير سالبة للمجاهيل ، اي $x_2 \geq 0$ تحققان المتباينة (a) والمعادلة (b) وحيث تكون P المعطاة في (c) اعظم ما يمكن .

ان الطريقة المنفردة (simplex method) هي طريقة خطوة بخطوة ابتدائية لحل مسائل البرمجة الخطية وهي مبنية على النظرية التالية :

اذا وجب ان تحقق n من المتغيرات x عدداً $m \leq n$ من المقيدات ، فان قيمة التوافق الخطية P العظمى تقتنى بكون ما لا يزيد عن m من المتغيرات ذات قيم لاصفرية .

في الحل التجريبي الابتدائي يعطي m من مجموع المتغيرات n قيما لاصفرية . ثم يعظم التوافق الخطي P باسقاط احد المتغيرات في الحل الابتدائي والاستعاضة عنه باحد المتغيرات الباقية التي اعطيت قيمة صفر أصلا . وتتوقف العملية عندما تصل P قيمتها العظمى ، كما يتوضح من الحسابات .

ويتطلب الحل بالطريقة المنفردة بان نحول جميع المتباينات الى معادلات اولاً وذلك باضافة متغيرات رخو (slack variables) بربح مقداره صفر (حيث انها لا تمثل كميات طبيعية) ثم نضيف متغيرات زائفة لجميع المعادلات ذات ربح سالب كبير $-L$ بحيث لا يمكن ان تصل P قيمتها العظمى الا اذا كانت هذه المتغيرات الزائفة تساوي صفراً (ولكي نتحقق المعادلات فان قيم المتغيرات الزائفة يجب ان تكون صفراً) . وهكذا فان متغير رخو x_3 ادخل في المعادلة (a) ومتغير زائف x_4 في المعادلة (b) بينما يصبح الربح

$$P = p_1x_1 + p_2x_2 + 0 \cdot x_3 - Lx_4 \quad (c')$$

j	x_1	x_2	x_3	x_4	C	x_i	p_i
3	3	4	1	0	80	x_3	0
4	1	2	0	1	24	x_4	$-L$
							$-24L = P$

• لاجل التوضيح الكامل لهذه الطريقة انظر كتاب البرمجة الخطية - طرق وتطبيقات للمؤلف S. I. Gass .

McGraw-Hill Book Company نيويورك 1958

ان المعادلات الجديدة (a) ، (b) مع متغير الرخو x_3 ومتغير زائف x_4 تظهر في السطرين الثالث والرابع من الجدول (1.17) . الحل الابتدائي هو ذلك الذي فيه x_2, x_1 أصفارو x_4, x_3 ليست بأصفار . وحيث ان x_4, x_3 تظهران في مصفوفة الوحدة (وهذا هو سبب ادخال متغيرات زائفة على المعادلات) . يكون الحل الاولي هو $x_4 = 24$, $x_3 = 80$ يقتنى الربح المناظر بكتابة القيم $p_4 = -L$, $p_3 = 0$ في عمود مجاور لهذه المتغيرات ثم حساب $P = \sum_i p_i x_i = -24L$

ان هذا (الربح) السالب الكبير يزداد باسقاط x_3 أو x_4 وادخال x_1 أو x_2 بدلا عنهما فمثلا . لو اخذت x_2 محل x_4 واعطيت القيمة x_4 . تصبح مجموعة المتغيرات الجديدة

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \Delta x_1 = x_1 = 0; \\ x'_2 &= x_2 + \Delta x_2 = r; \\ x'_3 &= x_3 + \Delta x_3 = 80 + \Delta x_3; \\ x'_4 &= x_4 + \Delta x_4 = x_4 - x_4 = 24 - 24 = 0. \end{aligned} \quad (e)$$

بادخال هذه المتغيرات بالمعادلات (3) ، (4) من الجدول (1.17) نرى ان هذه المعادلات تتحقق اذا كان

$$\begin{aligned} 4r + \Delta x_3 &= 0 \\ 2r &= 24 \end{aligned}$$

ومن هذا ينتج

$$\begin{aligned} x'_1 &= 0; & x'_2 &= r = 12; & x'_3 &= 80 - 4r = 32; & x'_4 &= 0; \\ P &= 3x_2 + 0 \cdot x_3 = 36. \end{aligned}$$

من ناحية اخرى لو اخذت x_2 محل x_3 لكننا حصلنا على

$$\begin{aligned} 4r &= 80; & 2r + \Delta x_4 &= 0; \\ x'_1 &= 0; & x'_2 &= r = 20; & x'_3 &= 0; & x'_4 &= 24 - 2r = -16, \end{aligned}$$

والذي هو حل غير مقبول لان جميع x_i يجب ان تكون ≥ 0 .

من الواضح ان وجود قواعد للتبديل يصبح ضروريا حالما يصبح عدد المتغيرات كبيرا وذلك لتجنب محاولات تفوق الحصر . يمكن تحديد هذه القواعد بسهولة بالطريقة التالية .

خذ معادلات الجدول 1.18 بنظر الاعتبار وليكن x_j المتغير الذي سيحل محل x_i من المحاولة الابتدائية فعندما تأخذ $x_j = r$ محل x_i في المعادلة ذات الترتيب i يكون التغير في الطرف الايسر

$$a_{ij}r - a_{ii}x_i = a_{ij}r - x_i$$

وهذا يجب ان يساوي صفرا وعليه

جدول (١-١٨)

$-p_i$	$-p_1$	$-p_2$	$-p_3$	$-p_4$		
$j \backslash i$	x_1	x_2	x_3	x_4	$C = x_i$	p_i
3	a_{31}	a_{32}	$a_{33} = 1$	$a_{34} = 0$	x_3	p_3
4	a_{41}	a_{42}	$a_{43} = 0$	$a_{44} = 1$	x_4	p_4
	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	P	

$$x'_j = r = \frac{x_i}{a_{ij}} \quad (1.18.1)$$

لاجل الحصول على قيم موجبة لجميع المتغيرات x'_j لقيمة ما j يجب ان تختار i بحيث تعطي اصغر قيمة موجبة r

مثلا لقيمة j تساوي 2، 4 تعطي $i = 3$ ، $r = \frac{2.4}{2} = 12$ تعطي $i = 4$ ، $r = \frac{8.0}{4} = 20$ وعليه يجب اختيار $i = 4$

لاختيار j يجب أن نحسب التغيرات التي تحصل في جميع المتغيرات نتيجة ادخال $x'_j = r$ في الحل الجديد عوضا عن المتغير القديم x_i

$$\Delta x_j = r,$$

$$\Delta x_i = -x_i = -a_{ij}r,$$

$$\Delta x_k = -a_{kj}r,$$

حيث x_k هو احد المتغيرات التي تغيرت (مثلا x_3 في الجدول 1.17)

$$\Delta x_k + a_{kj}x'_j = 0$$

حتى تتحقق المعادلة (k) في جدول (1.18)، ان التغير المناظر في P يكون

$$\Delta P = p_j r - p_i a_{ij} r - \sum_k p_k a_{kj} r$$

او بجعل المجموع يحتوي كل التغيرات x_j ، وتسمية الحرف السفلي ^(١) الصغير الجاري i

$$\Delta P = -r[\sum_i p_i a_{ij} - p_j]. \quad (1.18.2)$$

سيتم اختيار x_j بحيث يكون ΔP عددا كبيرا موجبا . من الممكن انجاز هذا بسهولة باختيار z التي يكون فيها

$$\Delta_j = \sum_i p_i a_{ij} - p_j \quad (1.18.3)$$

اكبر عدد سالب*. يحسب Δ_j باضافة $-p_j$ التي هي فوق x_j في جدول 1.18 يجب ان يلاحظ ان جميع Δ_j للمتغيرات مصفوفة الوحدة هي اصفار . ان الجدول العائد للمسألة الحالية 1.19 ، يبين ان اكبر قيمة Δ_j سالبة هي $(\Delta_2 = -2L - 3)$ فعليه $j = 2$ بينما اصغر $r = x_i/a_{i2}$ هي $x_4/a_{42} = 12$ وعليه نأخذ x_2 بدلاً من x_4

$-p_i$	-1	-3	0	L			
$j \backslash i$	x_1	x_2	x_3	x_4	C	x_i	p_i
3	3	4	1	0	80	x_3	0
4	1	2	0	1	24	x_4	-L
Δ_j	-L - 1	-2L - 3	0	0	-24L	P	

جدول 1.19

للحصول على القيم الجديدة x_j للمتغيرات ، يتم توفيق المعادلات (3) و(4) من الجدول (1.19) خطياً لأجل الحصول على مصفوفة المتطابقة في المتغيرات اللاصفرية الجديدة x_3, x_2 كما هو مبين في الجدول 1.20

$-p_i$	-1	-3	0	L				
$j \backslash i$	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	C	x_i	p_i	Expl.
3	1	0	1	-2	32	x_3	0	(3) - 2(4)
2	1/2	1	0	1/2	12	x_2	3	(1/2)(4)
Δ_j	(3/2) - 1	0	0	(3/2) + L	36	P'		

جدول (١-٢٠)

(*) اختيار j هنا لا يضمن اعظم زيادة في P حيث ان اصغر Δ_j مع اكبر r قد تعطي اكبر ΔP

ان القيم الجديدة هي $x'_2 = 12, x'_3 = 32$ وقيمة P الجديدة هي $P' = 36$
 وبما ان جميع Δ_i موجبة فان اي تغيير جديد في المتغيرات ينقص قيمة P .

ان الحل الامثل هو $P = 36, x_2 = 12, x_1 = 0$

ان مسألة البرمجة الخطية التالية محلولة في جدول 1.21

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10; \quad x_2 + x_3 \leq 20; \quad -x_2 + 2x_3 \leq 15;$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad P = x_1 - x_2 + 4x_3 = \max.$$

$-p_j$	-1	+1	-4	0	0					
j i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	C	x_i	p_i	Expl.	
1	1	2	-3	0	0	10	x_1	1		$j = 3$
4	0	1	1	1	0	20	x_4	0		$i = 5$
5	0	-1	2	0	1	15	x_5	0		$r = 15/2$
Δ_j	0	3	-7	0	0	10	P			
1'	1	1/2	0	0	3/2	65/2	x'_1	1	(1) + (3/2)(5)	$j = 2$
4'	0	3/2	0	1	-1/2	25/2	x'_4	0	(4) - (1/2)(5)	$i = 4$
3'	0	-1/2	1	0	1/2	15/2	x'_3	4	(1/2)(5)	$r = 25/3$
Δ_j	0	-1/2	0	0	7/2	125/2	P'			
1''	1	0	0	-1/3	5/3	85/3	x''_1	1	(2/3)(4)	
2''	0	1	0	2/3	-1/3	25/3	x''_2	-1	(1') - (1/2)(2'')	
3''	0	0	1	1/3	1/3	35/3	x''_3	4	(3') + (1/2)(2'')	
Δ_j	0	0	0	1/3	10/3	200/3	P''			

جدول (١٢-١)

لاحظ انه لم تصف متغيرات زائدة للمعادلة لان x_1 ظهرت اصلا بمعادلات على شكل وحدة المتجهات ، ان الحل الامثل $P = 200/3, x_3 = 35/3, x_2 = 25/3, x_1 = 85/3$

افتني بقيمة x_2 لاصفوية من ان وحدة ربع x_2 هي سالبة $p_2 = -1$ من الممكن توسيع الطريقة المفردة (simplex method) لمسائل اكثر شمولاً كما يأتي :-

(a) المسائل التي تتضمن تصغير دالة خطية f للمتغيرات x_j تحل بتعظيم الدالة

$$\phi(x_j) = -f(x_j)$$

(b) التقييدات من نوع

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq c_i$$

تختزل الى النوع اعلاه بكتابة

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leq -c_i$$

(c) التقييدات من نوع

$$x_j \geq a_j$$

تختزل الى تقييدات « متغير موجب » بواسطة المتغيرات الجديدة

$$y_j = x_j - a_j \geq 0$$

$$x_j \leq b_j$$

(d) التقييدات من نوع

تختزل الى تقييدات « متغير موجب » بواسطة المتغيرات الجديدة

$$y_j = b_j - x_j \geq 0$$

$$a_j \leq x_j \leq b_j$$

(e) التقييدات من نوع

$$1 \geq y_j \geq 0$$

تختزل الى التقييدات

$$y_j = \frac{b_j - x_j}{b_j - a_j}$$

بالمتغيرات الجديدة

$$1 - y_j \geq 0$$

ثم تؤخذ التقييدات المضافة

بنظر الاعتبار في الحسابات

(f) بما ان جميع التقييدات قد تكون معادلات ، لذلك فان الطريقة المفردة هي طريقة

لحل المعادلات الخطية الآتية ايضا .

(g) قد لا يكون هناك حل لمسألة برمجة خطية . يتبين هذا باستحالة الحصول على ربح

موجب .

: تمارين :

1.1 جد جذور المعادلات التالية مستخدما طريقة المماس لنيوتن والتعويض التركيبي للارقام

المعنوية المبينة ازاء كل منها .

(a) $x^3 + 1.2x^2 - 4x - 4.8 = 0$ (two figures).

(b) $x^3 - 0.87x^2 - 15.651x + 23.701 = 0$ (three figures).

(c) $x^3 + 6.6x^2 - 29.05x + 22.64 = 0$ (three figures).

الاجوبة

(a) $x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = -1.2$. (c) $x_1 = 2.10; x_2 = -9.80; x_3 = 1.10$.

1.2 جد جذور المعادلات التالية لثلاثة ارقام معنوية بطريقة نيوتن ذات المرتبة الثانية وطريقة

لتعويض التركيبي وطريقة المعادلات ذات الدرجة الثانية كلما دعت الضرورة لذلك .

- (a) $x^3 + 2.9x^2 + 14.89x + 6.85 = 0$.
 (b) $x^3 - 2.4x^2 - 1.4x - 6.8 = 0$.
 (c) $x^4 + 6.4x^3 + 24.04x^2 + 36.96x + 18.72 = 0$.
 (d) $x^4 - 2x^3 + 1.99x^2 - 2x + 0.99 = 0$.
 (e) $x^4 - x^3 - 0.44x^2 - 13.88x + 2.8 = 0$.

الاجوبة

- (b) $x_1 = 3.40$; $x_{2,3} = -0.500 \pm 1.323i$.
 (d) $x_1 = 1.100$; $x_2 = 0.900$; $x_{3,4} = \pm i$.

1.3 جد جذور المعادلات التالية لاربعة ارقام معنوية . استخدم الاستكمال الخطي والتعويض التركيبي لايجاد الجذر الاعظم

- (a) $x^3 - 4.65x^2 - 49.92x - 76.67 = 0$.
 (b) $x^3 + 6.8x^2 - 62.49x + 63.468 = 0$.
 (c) $x^3 - 13.6x^2 - 57.4x - 228.8 = 0$.
 (d) $x^3 - 10.2x^2 - 51.8x - 71.00 = 0$.

الاجوبة

- (a) $x_1 = 10.25$; $x_2 = -3.40$; $x_3 = -2.20$.
 (c) $x_1 = 17.6$; $x_{2,3} = -2.00 \pm 3.00i$.

1.4 جد لثلاثة ارقام عشرية الجذور الاربعة لكل من المعادلات التالية التي في كل منها يوجد جذران متساويان تقريبا .

- (a) $x^4 - 0.41x^3 + 1.632x^2 - 9.146x + 7.260 = 0$.
 (b) $x^4 - 5.81x^3 + 7.64x^2 + 7.2x - 14.47 = 0$.

الاجوبة .

- (a) $x_1 = 1.21$; $x_2 = 1.20$; $x_{3,4} = -1.00 \pm 2.00i$.

1.5 جد جذور المعادلات التالية لثلاثة ارقام معنوية مستخدما (a) طريقة كرافى (b) طريقة فرايدمن في تعيين الجذور المركبة.

- (a) $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = 0$.
 (b) $x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x - 30 = 0$.

- (a) $(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 6x + 8)$; $x_i = 2, 1, -3, 4$.

الاجوبة

1.6 جد جذور المعادلات التالية لثلاث ارقام معنوية مستعملا (a) طريقة كرافي (b) طريقة فريدمان لايجاد الجذور المركبة .

- (a) $x^4 - 14x^3 + 69.09x^2 + 182.56x + 109 = 0$.
 (b) $x^5 - 20.2x^4 + 132.18x^3 - 60.592x^2 - 72.693x - 14.525 = 0$.
 (c) $x^4 + 18x^3 + 245x^2 + 496x + 1040 = 0$.
 (d) $x^4 - 6.4x^3 + 40.04x^2 - 100.96x + 226.72 = 0$.

الاجوبة

- (a) $x_{1,2} = -1.00 \pm 0.30i$; $x_{3,4} = 8.00 \pm 6.00i$.
 (c) $x_{1,2} = -8 \pm 12i$; $x_{3,4} = -1 \pm 2i$.

1.7 جد الجذور الحقيقية لثلاثة ارقام معنوية للمعادلة التالية مستخدما طريقة المماس نيوتن

$$\cos x = x^2.$$

الاجوبة

$$x_{1,2} = \pm 0.824.$$

1.8 جد اصغر جذرين موجبين لكل من المعادلات التالية (لثلاث ارقام معنوية) مستخدما

(a) طريقة المماس نيوتن

(b) طريقة نيوتن من المرتبة الثانية

- (a) $\tan x = \tanh x$. (b) $\cos x \cosh x + 1 = 0$.
 (c) $\cos x \cosh x = 1$. (d) $\tan x = x$.
 (e) $\tan x = -x$. (f) $\tan x = 2x$.
 (g) $x \tan x = 1$. (h) $x \tan x = 2$.

الاجوبة

- (a) $x_1 = 3.93$; $x_2 = 7.07$. (c) $x_1 = 4.73$; $x_2 = 7.85$.
 (e) $x_1 = 2.03$; $x_2 = 4.91$. (g) $x_1 = 0.860$; $x_2 = 3.43$.

1.9 جد اصغر جذر موجب لثلاث ارقام لثلاث ارقام معنوية للمعادلة التالية بطريقة فتح

الدوال بالمتسلسلات الاسية

$$x \tan x = 1.$$

$$x_1 = 0.860.$$

الاجوبة

1.10 جد الجذور الموجبة لثلاث ارقام معنوية للمعادلة التالية بطريقة فك الدوال بالمتسلسلات
الاسية

$$\cos x = x^2.$$

1.11 جد الصفرين الاولين في دالة بسل Bessel من النوع الاول والمرتبة الاولى لثلاثة
ارقام معنوية مستخدما طريقة نيوتن
ملاحظة : استخدم جدول دوال بسل وتذكر :

$$J_1'(x) = -\frac{1}{x}J_1(x) + J_0(x).$$

$$x_1 = 3.83; x_2 = 7.02.$$

الاجوبة

1.12 جد الجذور المركبة للمعادلات المتسامية التالية :

$$(a) \cosh z = 4. \quad (b) \sin z = 2. \quad (c) e^{2z} + z = 2,$$

الاجوبة

$$(b) z_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} + 1.32i, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

1.13 عيّن جذور النظم التالية لثلاثة ارقام معنوية مستخدما طريقة المحددات.

(a)

x_1	x_2	x_3	c
2	4	-2	14
1	3	-4	16
-1	2	3	1

(b)

x_1	x_2	x_3	x_4	c
3.0	-4.0	2.4	2.0	-21.3
-3.0	1.0	4.2	-3.0	-15.4
2.0	1.5	1.0	6.2	1.7
4.0	-1.0	-3.4	3.0	10.3

(c)

x_1	x_2	x_3	c
3.0	-1.3	4.0	3.9
-2.0	4.5	3.2	10.4
1.4	2.0	-3.0	7.7

Ans. (b) $x_1 = -1.5$; $x_2 = 2.0$; $x_3 = -4.5$; $x_4 = 1.0$.

الاجوبة

1.14 جد لثلاثة ارقام معنوية جذور النظم التالية مستخدما نهج كاوس Gauss scheme

(a)

x_1	x_2	x_3	c
3.5	2.8	6.2	9.87
2.7	8.0	3.0	-6.17
-4.0	-3.6	-2.8	5.65

(b)

x_1	x_2	x_3	c
2.1	-4.5	-2.0	19.07
3.0	2.5	4.3	3.21
-6.0	3.5	2.5	-18.25

(c)

x_1	x_2	x_3	x_4	c
2.0	-4	-3.25	1	4.84
3.0	-3	-4.30	8	8.89
1.0	-5	3.30	-20	-14.01
2.5	-4	2.00	-3	-20.29

(d)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	c
3	-2	5.3	-2.1	1.0	28.3
1	4	-6.0	4.5	-6.0	-36.2
3	6	-7.3	-9.0	3.4	24.5
-2	-3	1.0	-4.0	6.0	16.2
1	-4	6.5	1.0	-3.0	4.3

(b) $x_1 = 1.34$; $x_2 = -4.76$; $x_3 = 2.58$.

الاجوبة

(d) $x_1 = 2.06$; $x_2 = 3.22$; $x_3 = 4.03$; $x_4 = -2.01$; $x_5 = 3.00$.

1.15 جد اول تقريب لجذور المعادلات التالية مستخدما مخطط كاوس ومستخدما المسطرة الحاسبة حاسبا الاخطاء باليد أو بالآلة الحاسبة. بعد ذلك جد ارقام معنوية اضافة لذلك بحل معادلات الخطأ بالمسطرة الحاسبة.

(a)

x_1	x_2	x_3	c
3.5	2.8	6.2	9.8999
2.7	8.9	3.0	-6.1744
4.0	3.6	2.8	5.6512

(b)

x_1	x_2	x_3	x_4	c
2.0	1.0	-3.25	1.0	4.8392
3.0	-3.0	-4.30	8.0	8.8581
1.0	-5.0	3.30	-20.0	-13.9212
2.5	-4.0	2.00	-3.0	-20.2815

(a) $x_1 = -3.0347; x_2 = -1.1904; x_3 = 3.8475.$

الاجوبة

1.16 انجز عمليات المصفوفات التالية

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ans. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 11 & 3 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 5 & 19 & 6 \\ 7 & 12 & -3 \\ 15 & 40 & 10 \end{bmatrix}$

الاجوبة

(f) $\begin{bmatrix} 18 & 5 & 6 & 4 \\ 28 & 17 & -10 & 3 \\ 11 & 11 & 5 & 2 \\ 10 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

1.17 جد لثلاثة ارقام معنوية جذور الانظمة التالية مستخدما طريقة كولسكي Cholesky

(a)

x_1	x_2	x_3	c
2.5	-3.0	4.6	-1.05
-3.5	2.6	1.5	-14.46
-6.5	-3.5	7.3	-17.735

(b)

x_1	x_2	x_3	c
-3.60	2.40	1.50	-1.359
1.40	-1.30	2.65	-3.725
4.26	-3.00	2.85	-3.623

(c) System of Problem 1.14(c).

(d) System of Problem 1.14(d).

(e)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	c
2	-1	4	-3	1	11
-1	1	2	1	3	14
4	2	3	3	-1	4
-3	1	3	2	4	16
1	3	-1	4	4	18

(a) $x_1 = 1.24$; $x_2 = -2.45$; $x_3 = -2.50$. (c) $x_1 = 2.34$; $x_2 = 4.51$; $x_3 = -6.00$; $x_4 = -1.30$. (e) $x_1 = 1.00$; $x_2 = 2.00$; $x_3 = 1.00$; $x_4 = -1.00$; $x_5 = 4.00$.

1.18 جد مقلوب كل من المصفوفات التالية

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

الاجوبة

(b) $\begin{bmatrix} \frac{9}{29} & \frac{1}{29} & \frac{-4}{29} \\ \frac{15}{58} & \frac{-4}{29} & \frac{3}{58} \\ \frac{-13}{29} & \frac{5}{29} & \frac{9}{29} \end{bmatrix}$

1.19 جد لثلاثة ارقام معنوية جذور الانظمة التالية بطريقة المعادة

(a)

x_1	x_2	x_3	c
-6	1	1	-1133
1	-6	1	-3200
1	1	-6	-4200

(b)

x_1	x_2	x_3	c
-1	0.4	0.5	-1.41
0	-1	0.3	2.81
0.2	0.3	-1	-4.48

(c)

x_1	x_2	x_3	x_4	c
10	8	6	0	16.4
0	10	8	4	-3.8
2	0	10	2	36.9
1	0	6	10	30.9

(d)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	c
10	1	1	1	1	15
2	10	2	1	1	17
2	1	10	1	2	18
1	2	2	10	2	19
1	1	1	2	10	25

(e)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	c
8.0	-2.4	-1.6	2.0	0	12.00
0	10.0	0	-4.0	-2.3	21.06
0	3.2	8.0	1.6	2.4	-23.28
-3.2	0	4.8	10.0	2.1	-14.06
-1.6	0	1.6	2.4	8.0	-22.32

(f)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	c
4.00	0.80	0	1.20	0	5.60
0	8.00	1.60	1.60	2.40	-13.472
2.40	0.80	8.00	0	1.60	30.16
0	1.80	0	6.00	0.60	6.54
2.20	0	2.30	1.50	10.00	-15.631

الاجوبة

(a) $x_1 = 467$; $x_2 = 762$; $x_3 = 905$. (c) $x_1 = 2.40$; $x_2 = -3.20$; $x_3 = 3.00$; $x_4 = 1.05$. (e) $x_1 = 1.20$; $x_2 = 2.00$; $x_3 = -3.25$; $x_4 = 1.00$; $x_5 = -2.20$.

1.20 جد لثلاثة ارقام معنوية جذور المعادلات في الانظمة التالية بطريقة الارحاء

(relaxation)

(a) 1.19(b)

النظام في التمرين

(b)

x_1	x_2	x_3	c
-6	2	4	0
1	1	-5	-350
1	-6	2	-700

(c) 1.19(c).

النظام في التمرين

(d) 1.19(e).

النظام في التمرين

(e) 1.19(f).

النظام في التمرين

الاجوبة

(b) $x_1 = 155$; $x_2 = 189$; $x_3 = 139$. (c) $x_1 = 1.20$; $x_2 = -2.00$; $x_3 = 4.23$; $x_4 = 2.00$; $x_5 = -3.10$.

1.21 حل بطريقة التزهد لثلاثة ارقام معنوية كل من المعادلات في الانظمة التالية مستحصلا

اولا تقريبا غير دقيق للجذور بطريقة تدوير المعاملات كما مبين ادناه

(a)

x_1	x_2	x_3	c
-1	0.875	0.121	1.132
0.444	-1	0.222	-1.266
0.092	0.545	-1	-2.256

(b)

x_1	x_2	x_3	c
10.22	1.25	3.12	21.047
1.25	10.45	4.15	62.440
3.12	4.15	10.62	109.726

(a) $x_1 = 2.10; x_2 = 3.12; x_3 = 4.15.$

الاجوبة

1.22 جد x_1 و x_2 لثلاثة ارقام معنوية لكل من المعادلات غير المحدودة مستخدما طريقة التقريب المتعاقب

(a) $-2x_{j-1} + (2j + 4)x_j - jx_{j+1} = 6 \quad (x_0 = 0).$

(b) $-x_{j-1} + (j + 3)x_j - 2x_{j+1} = 12 \quad (x_0 = 0).$

Ans. (a) $x_1 = 1.22; x_2 = 1.34.$

الاجوبة

1.23 عين رتبة (rank) كل مصفوفة من المصفوفات التالية

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 5 & 6 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 10 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(a) : . (c) $r = 3.$

الاجوبة

1.24 افحص منظومة المعادلات التالية من حيث توازيمها مستخر-

(a) $\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6; \\ 5x_1 - 4x_2 + 10x_3 &= -8; \\ 4x_1 - 15x_2 - 6x_3 &= 14. \end{aligned}$

- (b) $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5;$
 $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6;$
 $-3x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 15.$
- (c) $4x - 2y + 6z = 8;$
 $x + y - 3z = -1;$
 $15x - 3y + 9z = 21.$
- (d) $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3;$
 $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 4;$
 $3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1.$
- (e) $x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5;$
 $2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 10.$

الاجوبة

- (a) Consistent; $x_1 = -3.03; x_2 = -1.30; x_3 = -1.10.$
(c) Consistent; $x = 1; y = 3z - 2; z = \text{arb}.$

1.25 افحص مجموعة المعادلات المتجانسة التالية وجد الحلول التي تختلف عن الصفر اذا وجد لكل منها .

- (a) $x + y + 4z = 0;$
 $2x - y - z = 0;$
 $6x + 4y + 18z = 0.$
- (b) $4x - 2y + z = 0;$
 $2x - y + 3z = 0;$
 $6x - 3y - 6z = 0;$
 $6x - 3y + 4z = 0.$
- (c) $2x + 2y + 2z + 2t = 0;$
 $2x + 6y + 4z + 4t = 0;$
 $7x + 9y + 8z + 8t = 0;$
 $5x + 3y + 4z + 4t = 0.$
- (d) $2x - y + 3z = 0;$
 $4x + 8y - 4z = 0;$
 $3x + 4y + 2z = 0.$

- (b) $x = \text{arb.}; y = 2x; z = 0.$
(d) $x = y = z = 0.$

الاجوبة

1.26 - (a) جد اصغر قيمة مميزة للوسيط λ المتجهات المميزة المقابلة لها (b) جد بطريقة التكرار اكبر قيمة مميزة للوسيط λ المقابل لها x وكذلك المتجه المميز المقابل لهذا الوسيط .

- (a) $(4 - \lambda)x_1 + x_2 = 0;$
 $x_1 + (3 - \lambda)x_2 = 0.$
- (b) $(3 - 2\lambda)x_1 + x_2 = 0;$
 $2x_1 + (5 - \lambda)x_2 = 0.$

- (c) $(20 - 2\lambda)x_1 - 16x_2 + 8x_3 + (2\lambda - 16)x_4 = 0;$
 $-8x_1 + (22 - 2\lambda)x_2 + (2\lambda - 16)x_3 + 4x_4 = 0;$
 $2x_1 + (\lambda - 8)x_2 + (22 - 2\lambda)x_3 - 8x_4 = 0;$
 $(\lambda - 8)x_1 + 4x_2 - 16x_3 + (20 - 2\lambda)x_4 = 0.$
- (d) $(\lambda - 2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0;$
 $x_1 + (\lambda - 1)x_2 - 5x_3 = 0;$
 $3x_1 - 5x_2 + (2\lambda - 3)x_3 = 0.$

الاجوبة

- (a) $\lambda_{\min.} = 2.38; x_2/x_1 = -1.62.$ (b) $\lambda_{\max.} = 5.27; x_2/x_1 = 7.54.$
(c) $\lambda_{\min.} = 63.814.$ (d) $\lambda_{\max.} = 6.03; x_1/x_3 = -1.04, x_2/x_3 = 1.20.$

1.27 جد لثلاثة ارقام معنوية لكل زوج من المعادلات الآتية غير الخطية تبدأ من النقطة الاولى المؤشرة ازاء كل منها .

- (a) $x^2 - 2y^2 + 4.82 = 0; x_0 = 1.30; y_0 = 1.70;$
 $2x + 4y^2 - 16.74 = 0.$
- (b) $x^3 + 3y^2 - 20.92 = 0; x_0 = 1.30; y_0 = -2.00;$
 $x^2 + 2y + 1.958 = 0.$
- (c) $x^3 + 4z^2 + 14.30 = 0; x_0 = -2.50; z_0 = 2.00;$
 $-x^2 + 6z - 3.44 = 0.$
- (b) $x = 1.65; y = -2.34.$

الاجوبة

1.28 في مسائل البرمجة الخطية التالية استعظم (*) الفائدة P

- (a) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 10;$
 $x_2 + x_3 \leq 20;$
 $-x_2 + 2x_3 = 15;$
 $P = x_1 - x_2 + 4x_3.$
- (b) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 20;$
 $x_2 + 2x_3 \leq 30;$
 $-x_2 + 4x_3 \leq 10;$
 $P = x_1 - 3x_2 + 4x_3.$
- (c) $x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0;$
 $2x_1 + 3x_2 - 4x_4 \leq 5;$
 $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 10;$
 $4x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq 8;$
 $P = x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4.$

- (b) $x_1 = 22.5; x_2 = 0; x_3 = 2.50; P = 32.5.$

الاجوبة

استعظم
 اي جد النهاية العظمى على وزن استعمل (٤) ص ١١ ج ١١ مجمع الوسيط . معجم اللغة العربية
 بالترجمة
 بالقاهرة

الفصل الثاني

الفروق المحدودة وتطبيقاتها العملية

Finite Differences and Their Applications

2.1 مقدمة :

كلما قادت مسألة فنية الى معادلة تفاضلية لا يمكن حلها بشكل مغلق (closed form)
وجب استخدام الطرق العددية التقريبية في الحل . وقد تستند هذه ، مثلا ، على مفكوك
المتواليات أو تكون طرقا عددية صرفة تقود الى تقييم المتكاملات المجهولة في نقاط معينة
من فترة التعريف بوسائط حسابية بسيطة . كذلك يمكن حل مسائل القيم الابتدائية والحدودية
التي تشمل معادلات تفاضلية اعتيادية أو جزئية ، بهذه الطرق . ان هذه الحلول العددية
لا تسمح عادة بايجاد القوانين الفيزيائية العامة ولكنها تؤثر اعتماد المتغيرات المعنية على
الوسائط المختلفة للمعادلة ، وخاصة اذا ما كتبت المعادلات بشكل لا بعدي none
dimensional

لقد اصبحت الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية شائعة في الآونة الاخيرة لان
المسائل الفنية الحديثة تقود الى معادلات معقدة نادرة الحل بحدود منتهية ولان الآلات
الحاسبة والحاسبات الالكترونية قد اصبحت واسعة الانتشار . وكذلك فان للطرق العددية
ميزة تسمح بأن يقوم من ليست لهم معرفة بالرياضيات العليا أو الفيزياء باداء العمل الفعلي . مما
يوفر جهود المتخصصين .

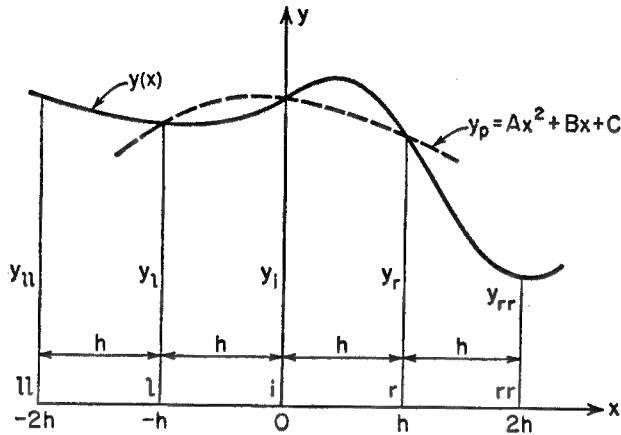
ان حلول المعادلات التفاضلية بالطرق العددية تتكون اساسا من ايجاد القيم العددية
للتكاملات المجهولة عند نقاط ارتكاز متراسة على المحور x للمعادلات التفاضلية الاعتيادية ،
وفي المستوى xy للمعادلات التفاضلية الجزئية ثنائية البعد . للحصول على قيم المركبات
(*pivotal values*) للتكامل ، يتم تقرب مشتقات f الواردة في المعادلة التفاضلية
بمشتقات قطوع مكافئة (*parabolas*) من الدرجة n التي تمر خلال عدد معين من نقاط
الارتكاز ، أو بمفكوك متسلسلة تيلر للدالة المجهولة f ، كما مبين في البنود التالية .

2.2 معادلات التفاضل باستكمال قطوع مكافئة :

Differentiation Formulas by Interpolating Parabolas

ان أبسط طريقة للحصول على تعابير تقريبية لمشتقات الدالة $y(x)$ المعطاة تخطيطيا أو
بواسطة جدول قيم بعض نقاط ارتكاز i ، تتكون من استبدال (أو التعويض) عن الدالة y

بقطع مكافئ يمر في عدد من نقاط الارتكاز ، ومن ثم أخذ مشتقات القطع المكافئ كقيم تقريبية لمشتقات الدالة y .



شكل (٢-١) (قطع مكافئ الاستكمال)

فمثلا ، لايجاد المشتقة الثانية y'' للدالة عندما تكون y معلومة في ثلاث نقاط ارتكاز متوالية r, i, l ذات فواصل (spacing) منتظمة h على محور x ، ندعوقيم المرتكزات المناظرة y_r, y_i, y_l (الشكل 2.1) * ثم نمرر قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

في هذه النقاط . باختيار نقطة الاصل عند الاحداثي الصادي للنقطة i ، للسهولة ودون فقدان العمومية ، نحصل على :

$$y(-h) = y_l = Ah^2 - Bh + C$$

$$y(0) = y_i = C$$

$$y(h) = y_r = Ah^2 + Bh + C,$$

ومن هذه المعادلات نحصل على

$$y_l - 2y_i + y_r = 2Ah^2.$$

* ان الرقم i عند اسفل y يدل على ان المشتقة حسب عند نقطة ارتكاز i ، بينما r و l بدلنا على نقاط الارتكاز الواقعة على اليسار واليمين من i على التناظر .

وحيث ان المشتقة الثانية y'' للقطع المكافئ (a) تساوي $2A$
لذلك فان المشتقة الثانية y_i' للدالة y عند i تقرب بالمعادلة

$$y_i'' = \frac{1}{h^2} (y_l - 2y_i + y_r). \quad (2.2.1)$$

ويمكن الحصول على تعابير مماثلة لمشتقات اعلى درجة باستكمال قُطوع مكافئة من درجة اعلى تمرر في نقاط ارتكاز متناظرة او غير متناظرة الموقع بالنسبة للنقطة i . وهكذا .
بامرار القطع المكافئ ، التكعبي .

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (b)$$

في النقاط r, i, l والنقطة الواقعة الى يمين r (شكل 2.1) . واختيار الاصل عند i
ثانية ، نحصل على :

$$y(-h) = y_l = -Ah^3 + Bh^2 - Ch + D;$$

$$y(0) = y_i = D;$$

$$y(h) = y_r = Ah^3 + Bh^2 + Ch + D;$$

$$y(2h) = y_{rr} = 8Ah^3 + 4Bh^2 + 2Ch + D.$$

يحذف D, C, B بين هذه المعادلات نحصل على القيمة $6A$ للمشتقة الثالثة للقطع المكافئ
(b) وعليه يكون تقريب y_i''' غير المتناظر

$$y_i''' = \frac{1}{h^3} (-y_l + 3y_i - 3y_r + y_{rr}). \quad (2.2.2)$$

لقد وفر ساوثويل في كتابه طرق الارحاء في الفيزياء النظرية * قائمة بمثل هذه الصيغ
لنقاط منتظمة التباعد (التوزيع) ، تحت اسم بيكلي *Bickley's formulas*

من الممكن اشتقاق صيغ مماثلة عندما لا تتوزع نقاط الارتكاز بصورة منتظمة فصيغة
المشتقة الثانية مثلاً ، عند i لدالة معلومة في ثلاث نقاط موزعة على مسافات $h, \alpha h$ على التناظر
(الشكل 2.2) تقتنى بواسطة معادلة قطع مكافئ من الدرجة الثانية يمر في هذه النقاط
الثلاثة

كتاب ساوثويل المسمى طرق الارحاء في الفيزياء النظرية المطبوع في مطبعة اوكسفورد لندن سنة ١٩٤٦

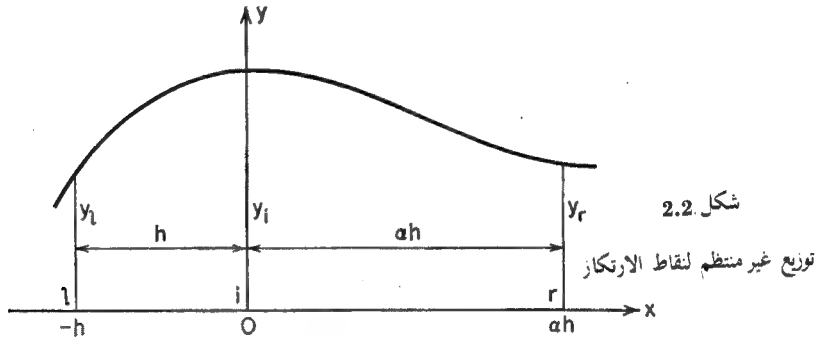
* R. V. Southwell, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Oxford University Press, London, 1946.

$$\begin{aligned} y(-h) &= y_l = Ah^2 - Bh + C; \\ y(0) &= y_i = C; \\ y(\alpha h) &= y_r = \alpha^2 Ah^2 + \alpha Bh + C. \end{aligned}$$

بحذف الثوابت C, B فالمشتقة $2A$ للقطع المكافئ بدلالة y_r, y_i, y_l تكون

$$y_i'' = \frac{1}{h^2} \frac{2}{\alpha(\alpha+1)} [\alpha y_l - (1+\alpha)y_i + y_r], \quad (2.2.3)$$

التي تتطابق مع المعادلة (2.2.1) عند $\alpha = 1$



2.3 صيغ التفاضل بطريقة فتح الدوال بمفكوك متسلسلة تيلر

Differentiation Formulas by Taylor Series Expansions

من الواضح انه بينما تكون بعض الاخطاء متأصلة في بعض انواع المعادلات من نوع (2.2.1) (2.2.2) (2.2.3) فان هذا الخطأ يتلاشى كلما اخذنا الفاصل h اصغر فاصغر . ولمعرفة كيف ان هذا الخطأ يعتمد على h نرى انه من الملائم اعادة اشتقاق هذه الصيغ باستخدام مفكوك تيلر .

ان مفكوك تيلر للمقدار $y(x+h)$ حول x هو*

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x); \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

حيث $y^{(n)}$ تعني $d^n y / dx^n$ وان $y^{(0)}(x)$ تعني $y(x)$ وان $0! = 1$ بتطبيق المعادلة (2.3.1) باستخدام رموز الشكل (2.2) نحصل على المفكوكات عند

$$x + \alpha h \quad \text{at } x - h;$$

$$\begin{aligned} y_r &= y_i + \alpha h y'_i + \frac{\alpha^2 h^2}{2} y''_i + \frac{\alpha^3 h^3}{6} y'''_i + \frac{\alpha^4 h^4}{24} y^{iv}_i + \dots \\ y_l &= y_i - h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i - \frac{h^3}{6} y'''_i + \frac{h^4}{24} y^{iv}_i - \dots \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

نحصل مباشرة على y' التقريبي بالطرح

$$y_r - y_l = (\alpha + 1)h y'_i + (\alpha^2 - 1) \frac{h^2}{2} y''_i + (\alpha^3 + 1) \frac{h^3}{6} y'''_i + \dots$$

ومنها نحصل على

$$y'_i = \frac{1}{(\alpha + 1)h} (y_r - y_l) + (1 - \alpha) \frac{h}{2} y''_i - \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha} \frac{h^2}{6} y'''_i + \dots$$

وهذه النتيجة تشير الى ان تقريب اول مشتقة

$$y'_i = \frac{1}{(\alpha + 1)h} (y_r - y_l) \quad (2.3.3)$$

وبخطأ قدره

$$(1 - \alpha) \frac{h}{2} y''_i - \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha} \frac{h^2}{6} y'''_i + \dots,$$

وهذا الخطأ يقترب من الصفر بسرعة اقتراب h منه اذا كانت $\alpha \neq 1$ وبسرعة اقتراب h^2 اذا كانت $\alpha = 1$ اي في حالة كون نقاط الارتكاز متظمة الفواصل ، وبالمثل نحصل على تغير y'_i بحذف y''_i من معادلتى (2.3.2) .

$$y'_i = \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)h} [y_r - (1 - \alpha^2)y_i - \alpha^2 y_l], \quad (2.3.4)$$

والتي يقترب الخطأ فيها من الصفر بسرعة اقتراب h^2 مهما كانت قيمة α وتصبح المعادلة (2.3.4) مطابقة للمعادلة (2.3.3) في حالة $\alpha = 1$

بحذف y'_i من معادلتى (2.3.2) نحصل على تعبير للمقدار y''_i

$$\begin{aligned} y''_i &= \frac{1}{h^2} \frac{2}{\alpha(\alpha + 1)} [\alpha y_l - (1 + \alpha)y_i + y_r] + (1 - \alpha) \frac{h}{3} y'''_i \\ &\quad - \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha} \frac{h^2}{12} y^{iv}_i + \dots, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

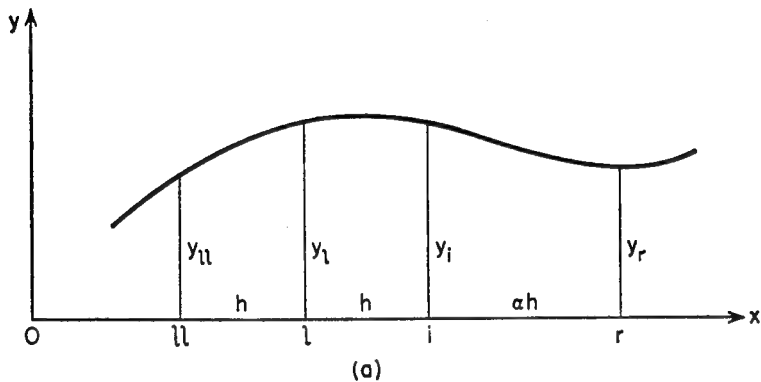
الذي يبين ان الخطأ في y_i'' الوارد في (2.2.3) يقترب من الصفر بسرعة h عندما تكون $\alpha \neq 1$ بسرعة h^2 عندما تكون $\alpha = 1$ ويمكن الحصول على ضروب من المعادلات بهذه الطريقة كما يمكن حساب خطئها بسهولة .
 ويستطيع القاريء ان يبرهن ، مثلاً ، على ان الخطأ في قيمة y_i'' التقريبية المحسوبة بفواصل

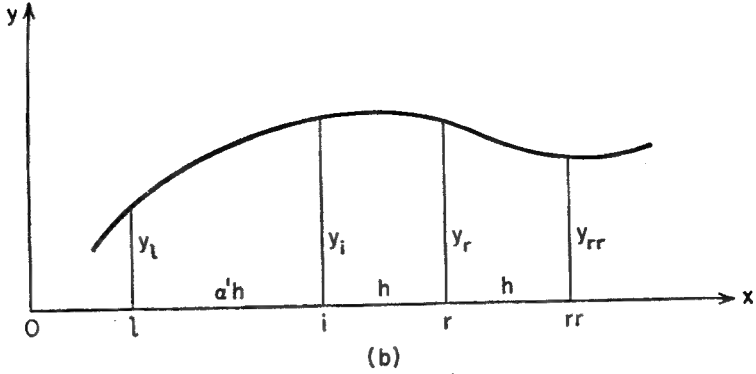
$$y_i'' = \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)h^2} [\alpha(\alpha^2 - 1)y_{ll} - 2(\alpha^3 - 4\alpha)y_l + (\alpha^3 - 7\alpha - 6)y_i + 6y_r], \quad (2.3.6)$$

منتظم h بين l, ll وبين l, i وفواصل ah بين i, r (الشكل 2.3a)
 يقترب من الصفر بسرعة اقتراب h^2 منه . ان المعادلة النظرية لنقاط الشكل (2.3b) هي :

$$y_i'' = \frac{1}{\alpha'(\alpha' + 1)(\alpha' + 2)h^2} [6y_l + (\alpha'^3 - 7\alpha' - 6)y_i - 2(\alpha'^3 - 4\alpha')y_r + \alpha'(\alpha'^2 - 1)y_{rr}] \quad (2.3.7)$$

ويقترب خطؤها هي الاخرى من الصفر بسرعة اقتراب h^2





شكل (٢-٣) مسافات غير متساوية بين النقاط

كلما كانت نقاط الارتكاز منتظمة الفواصل ، امكن تطبيق طريقة متسلسلة تيلر رمزيا بالاقتران مع فكرة الفروق التي تلعب دورا كبير الاهمية في كل الحسابات العددية . وبهذه الطريقة يمكن حساب ضروب عديدة من التقريبات العملية للمشتقات والاختفاء المناظرة بطريقة اقتصادية كما هو مبين في البند التالي :

2.4 الفروق الخلفية [التراجعية] Backward Differences

لنفرض انه اعطيت القيم التالية

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_u, y_l, y_i, y_r, y_{rr}, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$$

لدالة $y(x)$ عند نقاط ارتكاز منتظمة الفواصل h ضمن فترة التعريف ، اننا نقصد بفروق y التراجعي الاول عند i

$$\nabla y_i \equiv y_i - y_{i-1} \quad (2.4.1)$$

كما ان الفرق التراجعي الثاني عند i هو الفرق بين الفروق الاولى ويعطي بما يلي

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla y_i) &\equiv \nabla^2 y_i = (y_i - y_{i-1}) - (y_{i-1} - y_{i-2}) \\ &= y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

وبالمثل فان الفرق التراجعي n هو الفرق بين الفروق من درجة $(n-1)$ أي

$$\nabla^n y_i \equiv \nabla(\nabla^{n-1} y_i).$$

دلتا الاخرقية المقلوبة ∇ تستخدم للدلالة على الفروق التراجعية بينما دلتا الاعتيادية تستخدم للدلالة Δ على الفروق الامامية والرمز δ يدل على الفروق المركبة.

من السهل اثبات كون معاملات قيم المرتكزات للفرق n هي نفس معاملات مفكوك ذي الحدين (binomial) $(a - b)^n$ مثلا

$$\nabla^3 y_i = y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}; \quad (2.4.3)$$

$$\nabla^4 y_i = y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} + y_{i-4}. \quad (2.4.4)$$

لقد بوبت الفروق الخلفية المتعاقبة في جدول 2.1

i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$
0	y_0					
1	y_1	∇y_1				
2	y_2	∇y_2	$\nabla^2 y_2$			
3	y_3	∇y_3	$\nabla^2 y_3$	$\nabla^3 y_3$		
4	y_4	∇y_4	$\nabla^2 y_4$	$\nabla^3 y_4$	$\nabla^4 y_4$	
5	y_5	∇y_5	$\nabla^2 y_5$	$\nabla^3 y_5$	$\nabla^4 y_5$	$\nabla^5 y_5$

جدول ١ - ٢. الفروق التراجعية أي الخلفية

من المعلوم انه يمكن استخدام مؤشر التفاضلي $D \equiv d/dx$ رمزيا كرقم لانه يخضع لقوانين الجبر الاساسية . كذلك يمكن استخدام مؤثر الفروق ∇ رمزيا كرقم (او متغير) للسبب نفسه . كما هو مبين بالمتطابقات التالية

$$\nabla(y_i + y_j) = \nabla y_i + \nabla y_j = \nabla y_j + \nabla y_i;$$

$$\nabla(cy_i) = c\nabla y_i;$$

$$\nabla^m(\nabla^n y_i) = \nabla^{m+n} y_i.$$

من الممكن . باستعمال هذه الخواص . التعبير عن فروقات الدالة y بدلالة المشتقات المتتالية كما ان العكس ممكن بحيث يعبر عن المشتقات بدلالة الفروقات وان اشتقاق هذه التعابير بطريقة الرموز يحمل كفاءة عالية .
مثلا ان مفكوك تيلر للدالة $y(x + h)$ حول x هو

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \dots, \quad (a)$$

(*) انظر أي كتاب في المعادلات التفاضلية او كتاب -

E. Stephens. The Elementary theory of operational Mathematics Mc- Graw- Hill company- Inc., New York, 1937.

فبعد استخدام D وقواها للدلالة على مشتقات y تصبح

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + \frac{h}{1!} Dy(x) + \frac{h^2}{2!} D^2y(x) + \frac{h^3}{3!} D^3y(x) + \dots \\ &= \left(1 + \frac{h}{1!} D + \frac{h^2}{2!} D^2 + \frac{h^3}{3!} D^3 + \dots\right) y(x). \end{aligned} \quad (b)$$

باستخدام المتسلسلتين الأسيتين لكل من $e^{\pm x}$

$$e^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

يمكن كتابة المؤثر التفاضلي في الطرف الايمن من المعادلة (b) رمزيا كالتالي :

$$1 + \frac{hD}{1!} + \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} + \dots = e^{hD}, \quad (2.4.5)$$

وعليه يمكن كتابة $y(x+h)$ هي الاخرى رمزيا بالشكل التالي :

$$y(x+h) = e^{hD} y(x). \quad (2.4.6)$$

بوضع x_i بدل x و y_r بدل $y(x_i+h)$ بدل y_i $y(x_i)$ تصبح المعادلة السابقة

$$y_r = e^{hD} y_i. \quad (2.4.7)$$

بالمثل . بوضع $-h$ بدل h في المعادلة (2.4.6) تصبح

$$y(x-h) = e^{-hD} y(x) \quad (2.4.8)$$

وكالسابق بجعل $y_i = y(x_i-h)$, $y(x) = y_i$ نحصل على

$$y_i = e^{-hD} y_i. \quad (2.4.9)$$

يمكن الان كتابة الفرق التراجعي الاول ∇y_i [في المعادلة (2.4.1)] بواسطة

المعادلة (2.4.9) كالتالي :

$$\nabla y_i = y_i - y_i = [1 - e^{-hD}] y_i \quad (2.4.10)$$

او باستخدام المعادلة (2.4.5)

$$\begin{aligned}\nabla y_i &= \left[\frac{hD}{1!} - \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} - \frac{h^4 D^4}{4!} + \dots \right] y_i \\ &= \left[1 - \frac{hD}{2} + \frac{h^2 D^2}{6} - \frac{h^3 D^3}{24} + \dots \right] hD y_i.\end{aligned}\quad (2.4.11)$$

تعطي المعادلة (2.4.11) مفكوك ∇y_i بمتسلسلة لانهاية في جميع مشتقات y عند i اذا ماكتبنا المعادلة (2.4.10) بصيغة تأثيرية (operational) صرفة ، باسقاط y_i من طرفي المعادلة

$$\nabla = 1 - e^{-hD}, \quad (2.4.12)$$

فان من الممكن استخدام «قواها» التقييم مفكوك المتسلسلات للفروق المتعاقبة لاية دالة. وهكذا بتربيع المعادلة (2.4.12) واستخدام المعادلة (2.4.5) يمكن الحصول على الفرق ∇^2 بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= (1 - e^{-hD})^2 = (1 + e^{-2hD} - 2e^{-hD}) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{2hD}{1!} + \frac{4h^2 D^2}{2!} - \frac{8h^3 D^3}{3!} + \frac{16h^4 D^4}{4!} - \dots \right) \\ &\quad - 2 \left(1 - \frac{hD}{1!} + \frac{h^2 D^2}{2!} - \frac{h^3 D^3}{3!} + \frac{h^4 D^4}{4!} - \dots \right) \\ \nabla^2 &= h^2 D^2 - h^3 D^3 + \frac{1}{12} h^4 D^4 - \dots\end{aligned}\quad (2.4.13)$$

بالمثل بتكعب المعادلة (2.4.12) او ضرب المعادلة (2.4.12) بالمعادلة (2.4.13) نحصل على :

$$\nabla^3 = h^3 D^3 - \frac{3}{2} h^4 D^4 + \frac{5}{24} h^5 D^5 - \dots, \quad (2.4.14)$$

بينما تعطي قوى المعادلة (2.4.12) الاعلى مفكوكات $\nabla^n y_i$ بدلالة مشتقات y عند i . وعلى العكس لايجاد مشتقات y بدلالة الفروق ، تحل المعادلة (2.4.12) للمقدار e^{-hD}

$$e^{-hD} = 1 - \nabla, \quad (2.4.15)$$

ثم بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة نحصل على

$$\ln e^{-hD} = -hD = \ln (1 - \nabla) = - \left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots \right).^*$$

وعليه فإن مفكوك المشتقة الاول D بمتسلسلة فروق لانهاية هو

$$hD = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots \quad (2.4.16)$$

وبأخذ القوى المتعاقبة للمعادلة (2.4.16) نحصل على تعابير لمشتقات اعلى بدلالة الفروق

$$\begin{aligned} h^2 D^2 &= \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{1}{2} \nabla^4 + \frac{5}{6} \nabla^5 + \dots; \\ h^3 D^3 &= \nabla^3 + \frac{3}{2} \nabla^4 + \frac{7}{4} \nabla^5 + \dots; \\ h^4 D^4 &= \nabla^4 + 2 \nabla^5 + \frac{1}{6} \nabla^6 + \dots; \\ h^5 D^5 &= \nabla^5 + \frac{5}{2} \nabla^6 + \frac{25}{6} \nabla^7 + \dots \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

ان مفكوكات الفروق, (2.4.11), (2.4.12), (2.4.13), (2.4.14), (2.4.16), (2.4.17), تجيز الاشتقاق البسيط لمعادلات التفاضل وحيدة الجانب (*unilateral differentiation*) واخطائها.

مثلاً، جعل المعادلات (2.4.11), (2.4.13), (2.4.14) لقيمة D^3, D^2, D على التوالي نحصل على

$$\begin{aligned} D &= \frac{\nabla}{h} + \frac{hD^2}{2} - \frac{h^2 D^3}{6} + \frac{h^3 D^4}{24} - \dots, \\ D^2 &= \frac{\nabla^2}{h^2} + hD^3 - \frac{7h^2 D^4}{12} + \dots, \\ D^3 &= \frac{\nabla^3}{h^3} + \frac{3hD^4}{2} - \frac{5h^2 D^5}{4} + \dots, \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

ان المتسلسلة الاسية لمفكوك $\ln (1 \pm x)$ هي

$$\ln (1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \dots$$

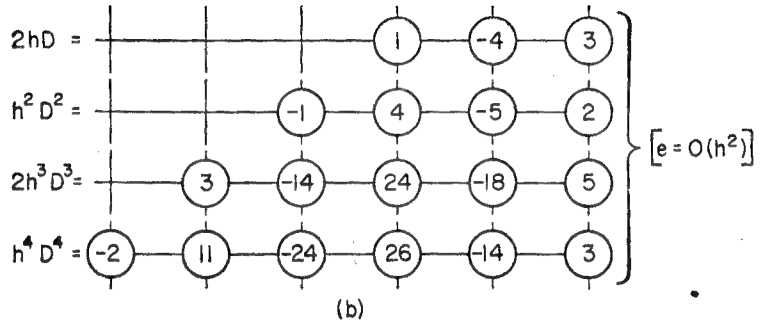
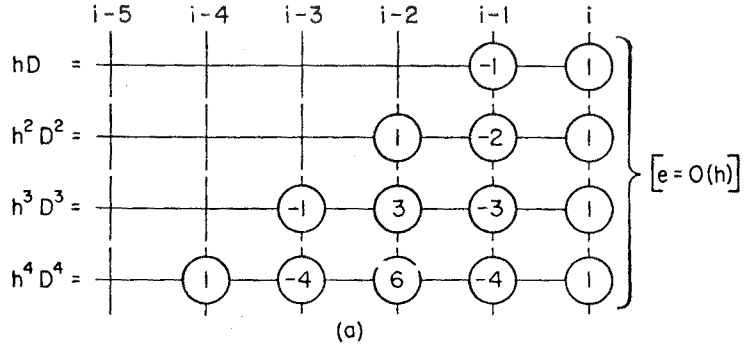
بأخذ الحد الاول فقط من كل متسلسلة . نحصل على :

$$Dy_i = \frac{1}{h} (y_i - y_{i-1}) + O(h),$$

$$D^2y_i = \frac{1}{h^2} (y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}) + O(h), \quad (2.4.19)$$

$$D^3y_i = \frac{1}{h^3} (y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}) + O(h),$$

حيث الرمز $O(h)$ يعني « خطأ من رتبة h » ويساوي مجموع الحدود المهملة في المعادلة . (2.4.18)



شكل (٢-٤) مؤثرات الفروق الخلفية (التراجعية)

وبالمثل . يمكن اثبات ان تقريب المشتقة n بالحد الاول من مفكوك الفروقات التراجعية فيه خطأ من رتبة h

وللحصول على معادلات ذات خطأ من رتبة h^2 يجب استعمال الحدين الاولين من مفكوك المشتقة . وهكذا ، بحذف $h^2 D^2$ من المعادلتين (2.4.11), (2.4.13) نحصل على

$$\nabla + \frac{\nabla^2}{2} = hD - \frac{1}{6}h^3 D^3 + \dots$$

او بالمعادلتين (2.4.1), (2.4.2)

$$Dy_i = \frac{1}{2h} (3y_i - 4y_i + y_u) + O(h^2). \quad (2.4.20)$$

وبالمثل . بجمع المعادلتين (2.4.13), (2.4.14) نحصل على

$$\nabla^2 + \nabla^3 = h^2 D^2 - \frac{1}{12}h^4 D^4 + \dots$$

او بالمعادلتين (2.4.2), (2.4.3) نحصل على

$$D^2 y_i = \frac{1}{h^2} (2y_i - 5y_i + 4y_u - y_{uu}) + O(h^2). \quad (2.4.21)$$

وعلى العموم . لو اخذت اول m من حدود مفكوك المشتقات في فروق تراجعية بنظر الاعتبار فان المعادلة المرادفة تكون ذات خطأ من رتبة h^m

ان الجزيئات الرياضية "mathematical molecules" في الشكل 2.4 تعبر عن المشتقات الأكثر شيوعاً بدلالة الفروق التراجعية مع رتبة الاخطاء المرادفة .

2.5 الفروق الامامية Forward Differences

كما ان الفروق الخلفية تعرف بدلالة نقاط كلها على يسار i ، كذلك فان الفروق الامامية تعرف بدلالة نقاط على يمين i .

ان تعريف فرق y الامامي الاول هو :

$$\Delta y_i \equiv y_r - y_i \quad (2.5.1)$$

ويمكن كتابته رمزياً بواسطة المعادلة (2.4.7)

$$\Delta = e^{hD} - 1. \quad (2.5.2)$$

وللفروقات الامامية المتعاقبة

$$\Delta^2 y_i = y_{rr} - 2y_r + y_i,$$

$$\Delta^3 y_i = y_{rrr} - 3y_{rr} + 3y_r - y_i, \quad (2.5.3)$$

.....

معاملات مرتكزات مساوية لمعاملات مفكوك ذي الحدين $(a - b)^n$ وهي مرتبة في الجدول 2.2

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
4	y_4	Δy_4				
5	y_5					

جدول (٢-٢) جدول الفروق الامامية

لأجل فك مشتقات الدالة بدلالة الفروق الامامية نحل المعادلة (2.5.2) لقيمة e^{hD} ثم يؤخذ لوغاريتم الطرفين :

$$hD = \ln(1 + \Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots \quad (2.5.4)$$

بأخذ قوى هذه المعادلة نحصل على :

$$\begin{aligned} h^2 D^2 &= \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{1}{2}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \dots; \\ h^3 D^3 &= \Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4 + \frac{7}{4}\Delta^5 - \dots; \\ h^4 D^4 &= \Delta^4 - 2\Delta^5 + \frac{1}{8}\Delta^6 - \dots; \\ h^5 D^5 &= \Delta^5 - \frac{5}{2}\Delta^6 + \frac{25}{8}\Delta^7 - \dots \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

وبالعكس بفتح المعادلة (2.5.2) نحصل على :

$$\Delta = hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} + \frac{h^4 D^4}{4!} + \dots, \quad (2.5.6)$$

وبأخذ قوى Δ ، نحصل منها على :

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= h^2 D^2 + h^3 D^3 + \frac{7}{2}h^4 D^4 + \dots; \\ \Delta^3 &= h^3 D^3 + \frac{3}{2}h^4 D^4 + \frac{5}{4}h^5 D^5 + \dots; \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

من الممكن اثبات كون الخطأ في مفكوك المشتقة بدلالة الفروق الامامية [المعادلات (2.5.4) و (2.5.5)] والتي تحتوي على m من الحدود يكون من رتبة h^m .

تعطي الجزئيات الرياضية في الشكل 2.5 تعابير المشتقات الشائعة بدلالة الفروق الامامية مع رتبة الاخطاء المناظرة لها في المشتقات

	i	$i+1$	$i+2$	$i+3$	$i+4$	$i+5$	
$hD =$	$\begin{array}{ c } \hline -1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$					} $[e = O(h)]$
$h^2 D^2 =$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$				
$h^3 D^3 =$	$\begin{array}{ c } \hline -1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$			
$h^4 D^4 =$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$		

(a)

$2hD =$	$\begin{array}{ c } \hline -3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -1 \\ \hline \end{array}$				} $[e = O(h^2)]$
$h^2 D^2 =$	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -1 \\ \hline \end{array}$			
$2h^3 D^3 =$	$\begin{array}{ c } \hline -5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 18 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -24 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 14 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -3 \\ \hline \end{array}$		
$h^4 D^4 =$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -14 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 26 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -24 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 11 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -2 \\ \hline \end{array}$	

(b)

شكل 2.5 : مؤثرات الفروق الامامية

2.6 صيغ الاستكمال لكريكوري - نيوتن

Gregory-Newton Interpolation Formulas

في المسائل الهندسية توجد صيغتان مهمتان في الاستكمال من السهل ايجادهما بطريقة الفروق الخلفية وطريقة الفروق الامامية للدالة .

لنفرض ان قيم دالة ما . قابلة للترك بمتسلسلة تيلر . معلومة عند نقاط الارتكاز في فترة تعريفها وان هذه النقاط منتظمة التباعد h . وان a هو الاحداثي السيني للنقطة التي نرغب

ايجاد قيمة الدالة عندها هو $a \pm xh$ حيث x أي عدد حقيقي . بفك $y(a \pm xh)$ بمتسلسلة تيلر حول النقطة a ينتج :

$$y(a \pm xh) = y(a) \pm xhy'(a) + \frac{x^2h^2}{2} y''(a) \pm \frac{x^3h^3}{6} y'''(a) + \dots \quad (a)$$

ان صيغة كريكوري - نيوتن للاستكمال الامامي تنتج بتعويض الفروقات الامامية المعطاة بالمعادلة (2.5.4) والمعادلة (2.5.5) ، بدل مشتقات الدالة y عند a في مفكوك $y(a + xh)$. وبالتعويض في مفكوك $y(a - xh)$ عن مشتقات y عند a بدلالة الفروق التراجعية المعطاة بالمعادلة (2.4.16) والمعادلة (2.4.17) نحصل على صيغة كريكوري - نيوتن للاستكمال التراجعي . ويمكن انجاز هذه التعويضات ، وللقارئ ان يتحقق من ذلك مباشرة ، بالطرق الرمزية :

(2.5.2) من المعادلة

$$e^{hD} = 1 + \Delta$$

بوضع a بدل x في المعادلة (2.4.6) ووضع xh بدل h فيها نحصل :

$$y(a + xh) = e^{xhD}y(a) = (e^{hD})^xy(a), \quad (b)$$

وعليه فانه يمكن كتابة مفكوك المعادلة (a) رمزيا :

$$y(a + xh) = (1 + \Delta)^xy(a).$$

ان مفكوك ذي الحدين $(1 + \Delta)^x$ في هذه المعادلة يعطي صيغة الاستكمال الامامي :

$$y(a + xh) = \left[1 + x\Delta + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 + \dots \right] y(a). \quad (2.6.1)$$

وبالمثل بالنسبة للمعادلة (2.4.12)

كذلك اذا ماعوضنا a بدل x ، xh بدل h في المعادلة (2.4.8)

$$y(a - xh) = e^{-xhD}y(a) = (e^{-hD})^xy(a),$$

ويكتب مفكوك $y(a - xh)$ في المعادلة (a) رمزيا

$$y(a - xh) = (1 - \nabla)^x y(a).$$

كما ان مفكوك ذي الحدين للمقدار $(1 - \nabla)^x$ يعطي صيغة الاستكمال التراجعي

$$y(a - xh) = \left[1 - x\nabla + \frac{x(x-1)}{2!} \nabla^2 - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \nabla^3 + \dots \right] y(a). \quad (2.6.2)$$

مثلا لو اعطينا قيم $y = \sin \theta$ لقيم $\theta = 10^\circ(1')13''$ فان قيمة $\sin \theta$ عند $10^\circ 20'$ تحسب كما مبين في جدول 2.3 بالفروق الامامية ، يكون

$$xh = (20') = \frac{1}{3}^\circ \quad a = 10^\circ$$

i	θ_i°	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	10	0.17365	0.01716	-0.00006	0
1	11	0.19081	0.01710	-0.00006	
2	12	0.20791	0.01704		
3	13	0.22495			

جدول (٣-٢)

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ 20' &= 0.17365 + \frac{1}{1} (0.01716) + \frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})}{2} (-0.00006) \\ &\quad + \frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{6} (0) = 0.17938. \end{aligned}$$

واننا نحصل على نفس القيمة باستخدام الفروق التراجعية التي نأخذ فيها $\alpha = 13^\circ$ كما مبين بجدول 2.4 $xh (= 2^\circ 40') = \frac{8}{3}^\circ$

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ 20' &= 0.22495 - \frac{8}{1} (0.01704) + \frac{(\frac{8}{3})(\frac{8}{3})}{2} (-0.00006) \\ &\quad - \frac{(\frac{8}{3})(\frac{8}{3})(\frac{8}{3})}{6} (0) = 0.17938. \end{aligned}$$

(*) الرمز $\theta = a(h)b$ يقوم مقام قيم θ من a الى b بفترات h

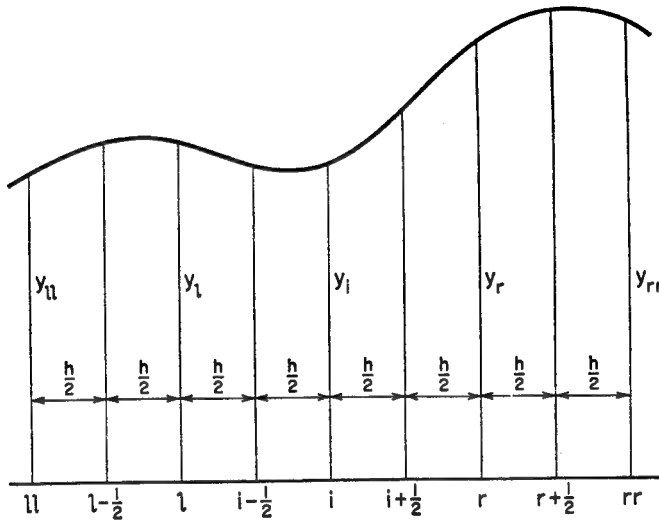
i	θ_i°	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$
0	10	0.17365			
1	11	0.19081	0.01716		
2	12	0.20791	0.01710	-0.00006	
3	13	0.22495	0.01704	-0.00006	0

جدول 2.4

ان قيمة $\sin 10^\circ 20'$ الحقيقية هي 0.17937
من الممكن استخدام صيغة كريكوري - نيوتن لاستيفاء القيم خارج الفترة التي تكون فيها y معلومة. فمثلا ، بواسطة الجدول 2.3 نحسب قيمة $\sin 13^\circ 30'$ وبأخذ $a = 10^\circ$ ،
 $xh = (3^\circ 30') = 3.5^\circ$ في المعادلة (2.6.1)

$$\sin 13^\circ 30' = 0.17365 + (3.5)(0.01716) + \frac{(3.5)(2.5)}{2} (-0.00006) = 0.23345.$$

وهذه القيمة صحيحة لآخر رقم حسب



شكل (٢-٦) نقاط الارتكاز للفروق المركزية. central differences.

2.7 الفروق المركزية Central Differences

لقد تبين في البندين 2.4 ، 2.5 ان الفروق التراجعية والامامية تقود الى تعابير ، وحيدة الجانب ، لمشتقات الدالة y يكون الخطأ في ابطس اشكالها من مرتبة h

ان الفروق المركزية التي تتضمن نقاط ارتكاز متماثلة التوزيع بالنسبة للنقطة i هي ادق من الفروق التراجعية او الامامية وذات فائدة متميزة في حل مسائل القيم الحدودية .
لتكن قيم الدالة $y(x)$ معلومة عند نقاط ارتكاز i منتظمة التباعد ، ولوقت الحاضر عند منتصف الفترات المحددة بنقاط الارتكاز (الشكل 2.6) ان فرق $y(x)$ المركزي الاول عند i يعرف بالتالي :

$$\begin{aligned}\delta y_i &\equiv y\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - y\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \\ &= y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (2.7.1)$$

والفرق المركزي الثاني عند i هو الفرق بين الفروق الاولى :

$$\begin{aligned}\delta^2 y_i &\equiv \delta(\delta y_i) = [y_{(i+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} - y_{(i-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}] - [y_{(i+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} - y_{(i-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}] \\ &= y_r - 2y_i + y_l.\end{aligned}$$

كما ان الفرق ذا الرتبة n يعرف بالتالي :

$$\begin{aligned}\delta^2 y_i &\equiv \delta(\delta y_i) = [y_{(i+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} - y_{(i-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}] - [y_{(i+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} - y_{(i-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}] \\ &= y_r - 2y_i + y_l.\end{aligned}\quad (2.7.2)$$

وهذا يقودنا الى :

$$\delta^3 y_i = y_{r+\frac{1}{2}} - 3y_{i+\frac{1}{2}} + 3y_{i-\frac{1}{2}} - y_{l-\frac{1}{2}}; \quad (2.7.3)$$

$$\delta^4 y_i = y_{rr} - 4y_r + 6y_i - 4y_l + y_{ll}. \quad (2.7.4)$$

ان معاملات قيم الارتكاز في الفروق المركزية هي نفس معاملات مفكوك ذي الحدين $(a - b)^n$ ان الفروق المركزية قد سطرت في جدول 2.5

Table 2.5
Central Differences

i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\mu \delta y_i$	$\mu \delta^3 y_i$
0	y_0						
1	y_1	$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 y_1$	$\delta^3 y_{3/2}$		$\mu \delta y_1$	
2	y_2	$\delta y_{3/2}$	$\delta^2 y_2$	$\delta^3 y_{5/2}$	$\delta^4 y_2$	$\mu \delta y_2$	$\mu \delta^3 y_2$
3	y_3	$\delta y_{5/2}$	$\delta^2 y_3$	$\delta^3 y_{7/2}$	$\delta^4 y_3$	$\mu \delta y_3$	$\mu \delta^3 y_3$
4	y_4	$\delta y_{7/2}$	$\delta^2 y_4$			$\mu \delta y_4$	
5	y_5	$\delta y_{9/2}$					

جدول (٢-٥) الفروق المركزية

ان جداول الفروق المركزية تعطي طريقة سهلة لتدقيق قيم الدالة المستخرجة بأية طريقة كانت . يظهر لنا من جدول 2.6 انه اذا اصاب قيمة الدالة عند i خطأ قدره ϵ بحيث ان $y_i + \epsilon$ تظهر في الجدول بدل y_i ، فان الخطأ ينتشر خلال الفروق المتعاقبة بعوامل مفكوك ذي الحدين $(a - b)^n$. اذا كانت الدالة ملساء الى حد ما ، أي أن مشتقاتها المتعاقبة تتناقص في قيمها العددية وان مشتقتها من رتبة n تقترب من الصفر كلما زادت n فان $\delta^n(y_i + \epsilon)$ يصبح فعلا مساويا المقدار $\delta^n \epsilon$ وعليه فحالما تصبح نسب المقادير $\delta^n y_i$ مساوية تقريبا نسب معاملات ذي الحدين ، نستطيع حساب قيمة ϵ وبالتالي قيمة y_i الصحيحة .

Table 2.6
Diffusion of Error in Central Difference Table

i	ϵ	$\delta \epsilon$	$\delta^2 \epsilon$	$\delta^3 \epsilon$	$\delta^4 \epsilon$	$\delta^5 \epsilon$	$\delta^6 \epsilon$	$\delta^7 \epsilon$	$\delta^8 \epsilon$
$i - 3$									
$i - 2$						ϵ	-7ϵ		
$i - 1$			ϵ	-3ϵ	-4ϵ	-5ϵ	15ϵ	21ϵ	28ϵ
i	ϵ	ϵ	-2ϵ	3ϵ	6ϵ	10ϵ	-20ϵ	-35ϵ	-56ϵ
$i + 1$		$-\epsilon$	ϵ	-3ϵ	-4ϵ	-10ϵ	15ϵ	35ϵ	70ϵ
$i + 2$				$-\epsilon$	ϵ	5ϵ	-6ϵ	-21ϵ	-56ϵ
$i + 3$						$-\epsilon$	ϵ	7ϵ	28ϵ

جدول (٢-٦) انتشار الأخطاء في الفروق المركزية

Table 2.7

i	x_i	y_i	δy_i	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_i$	$\delta^6 y_i$	$\delta^7 y_i$
1	0	1.00000							
2	0.1	1.10517	0.10517						
3	0.2	1.22140	0.11623	0.01106					
4	0.3	1.34986	0.12846	0.01223	0.00117				
5	0.4	1.57182	0.22196	0.09350	0.08127	0.08010			
6	0.5	1.64872	0.07690	-0.14506	-0.23856	-0.31983	-0.39993		
7	0.6	1.82212	0.17340	0.09650	0.24156	0.48012	0.79995	1.19988	
8	0.7	2.01375	0.19163	0.01823	-0.07827	-0.31983	-0.79995	-1.59990	-2.79978

جدول (٧-٢)

مثلا في جدول 2.7 ، الذي يحتوي على الفروق المركزية السبعة الأولى للدالة $y = e^x$ للقيم $x = 0.1, 0.7$ يلاحظ ان $\delta^3 y_i$ حول $i = 5$ لها قيم تتناسب بصورة تقريبية مع $-1, +3, -3, +1$ وعليه فان

$$\epsilon + 3\epsilon + 3\epsilon + \epsilon = 8\epsilon = 0.08127 + 0.23856 + 0.24156 + 0.07827 \\ = 0.63966; \\ \epsilon_b^{(3)} = 0.07996.$$

وبالمثل فان $\delta^4 y_i$ تعطي (لاحظ ان $\delta^4 y_5$ لا يمكن حسابها نتيجة للنقص الموجود بقيم الارتكاز)

$$\epsilon + 4\epsilon + 6\epsilon + 4\epsilon + 0 = 15\epsilon = 0.08010 + 0.31983 + 0.48012 + 0.31983 \\ = 1.19988; \\ \epsilon_b^{(4)} = 0.07999.$$

ان قيمة ϵ المستخرجة من الفروق الخامسة والسادسة والسابعة هي

$$\epsilon_b^{(5)} = \epsilon_b^{(6)} = \epsilon_b^{(7)} = 0.07999,$$

وقيمة y_5 المصححة تكون

$$y_5 = 1.57182 - 0.07999 = 1.49183.$$

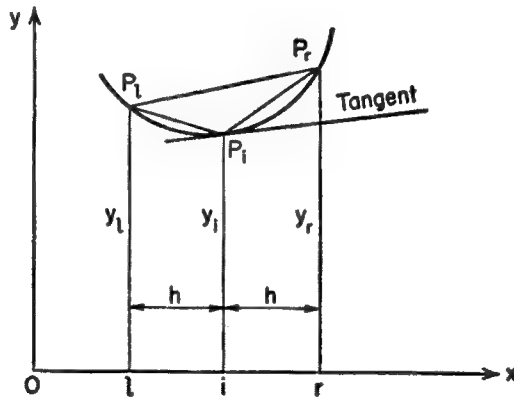
حيث ان أكثر من قيمة واحدة للدالة y قد تتأثر بالأخطاء ، وحيث ان هذه الأخطاء قد

تنتشر . فان من المهم ملاحظة أن الفروق ذات الدرجات الأعلى قد تتأثر بتراكيب (توافيق) من الأخطاء وتصبح أقل ثقة في حساب الخطأ من الفروق ذات الدرجة الأدنى .
 لأجل التخلص من قيم y عند النقاط الوسطية $l - \frac{1}{2}, i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}, r + \frac{1}{2}, \dots$ التي تظهر في تعابير الفروق المركزية الفردية ، نعرف فروقا فردية معدلة (موسطة) جديدة عند i على أنها متوسط الفرقين المركزيين الفرديين عند $i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}$ وبالتالي فان الفرق المتوسط الأول عند i يكون

$$\frac{1}{2}(\delta y_{i+\frac{1}{2}} + \delta y_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}[(y_r - y_i) + (y_i - y_l)] = \frac{1}{2}(y_r - y_l). \quad (a)$$

ان عملية التوسيط هذه مكافئة هندسيا لأخذ الميل عند i مساويا ميل الوتر $P_l P_r$ ، عوضا عن ميل الوتر $P_l P_i$ أو الوتر $P_i P_r$ (شكل 2.7) . ويرمز عادة لعملية التوسيط المستعملة في الحصول على المعادلة (a) بالمؤثر μ الذي يدعى بالمتوسط ويعرف بما يلي :

$$\mu y_i \equiv \frac{1}{2}(y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}}). \quad (2.7.5)$$



شكل (٧-٢) متوسط الفرق المركزي-

وباستعمال المتوسط يكون الفرق المتوسط الأول

$$\mu \delta y_i = \frac{1}{2}[\delta y_{i+\frac{1}{2}} + \delta y_{i-\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}(y_r - y_l). \quad (2.7.6)$$

يرتبط المؤثران μ و δ بعلاقة بسيطة. في الواقع ، عند تربيع المؤثر μ

$$\begin{aligned} \mu^2 y_i &= \mu \left[\frac{1}{2}(y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}}) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(y_r + y_i) + \frac{1}{2}(y_i + y_l) \right] \\ &= \frac{1}{4}(y_r + 2y_i + y_l), \end{aligned}$$

وبتأثير $(1 + \delta^2/4)$ على y_i نرى بالمعادلة (2.7.2) ان

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) y_i &= y_i + \frac{1}{4} (y_r - 2y_i + y_l) \\ &= \frac{1}{4} (y_r + 2y_i + y_l) = \mu^2 y_i. \end{aligned}$$

وعليه من الممكن الكتابة بالشكل الرمزي :

$$\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}. \quad (2.7.7)$$

تسمح المعادلات (2.7.2), (2.7.6), (2.7.7) بأن نفتتح مفكوك المشتقات ل y بدلالة فروقها المركزية وبالعكس يمكن التعبير عن مفكوك الفروق بدلالة المشتقات وذلك بالطرق الرمزية.

تصبح المعادلة (2.7.6) بواسطة المعادلتين (2.4.7), (2.4.9) كالآتي :

$$\begin{aligned} \mu \delta y_i &= \frac{1}{2} (y_r - y_l) = \frac{1}{2} e^{hD} y_i - \frac{1}{2} e^{-hD} y_i \\ &= \frac{e^{hD} - e^{-hD}}{2} y_i = \sinh(hD) y_i \end{aligned}$$

وتصبح رمزيا بالشكل التالي :

$$\mu \delta = \sinh(hD) \quad (2.7.8)$$

بتذكر مفكوك تيلر للجيب الزائدي

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

يكون مفكوك الفرق المركزي المتوسط الأول بدلالة المشتقات

$$\mu \delta = hD + \frac{h^3 D^3}{6} + \frac{h^5 D^5}{120} + \dots \quad (2.7.9)$$

وبالمثل ، باستخدام المعادلات (2.7.2), (2.4.7), (2.4.9) يصبح الفرق المركزي الثاني

$$\begin{aligned}\delta^2 y_i &= e^{hD} y_i - 2y_i + e^{-hD} y_i = 2 \left(\frac{e^{hD} + e^{-hD}}{2} - 1 \right) y_i \\ &= 2[\cosh(hD) - 1] y_i.\end{aligned}$$

وباستخدام مفكوك الجيب تمام الزائدي

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

يمكن كتابة الفرق المركزي الثاني رمزيا بالشكل :

$$\delta^2 = h^2 D^2 + \frac{h^4 D^4}{12} + \frac{h^6 D^6}{360} + \dots \quad (2.7.10)$$

وعلى نفس النمط يمكن الحصول على نفس النتيجة بفك الفرق المركزي الاول غير المتوسط في متسلسلة [المعادلة (2.7.1)]

$$\begin{aligned}\delta y_i &= y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} = (e^{hD/2} - e^{-hD/2}) y_i \\ &= 2 \sinh\left(\frac{hD}{2}\right) y_i = \left(hD + \frac{h^3 D^3}{2^2 \cdot 3!} + \frac{h^5 D^5}{2^4 \cdot 5!} + \dots \right) y_i,\end{aligned}$$

ومنها بصورة عامة

$$\delta^n = 2^n \sinh^n\left(\frac{hD}{2}\right) \quad (2.7.11)$$

وبصورة خاصة حيث $n = 2$ نستخرج المعادلة (2.7.10) .

ان حاصل ضرب المعادلتين (2.7.9) و (2.7.10) يعطي مفكوك الفرق المتوسط الثالث

$$\mu \delta^3 = h^3 D^3 + \frac{h^5 D^5}{4} + \frac{h^7 D^7}{40} + \dots, \quad (2.7.12)$$

كما ان مربع المعادلة (2.7.10) يعطي مفكوك الفرق المركزي الرابع

$$\delta^4 = h^4 D^4 + \frac{h^6 D^6}{6} + \frac{h^8 D^8}{80} + \dots \quad (2.7.13)$$

وعلى العكس . للحصول على مفكوك المشتقة الاولى بدلالة الفروق المركزية تحل المعادلة
(2.7.8) للمقدار hD :

$$hD = \sinh^{-1} (\mu\delta).$$

وبالتعويض بمتسلسلة $\sinh^{-1} x$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \dots,$$

نحصل على :

$$hD = \mu\delta - \frac{\mu^3\delta^3}{6} + \frac{3\mu^5\delta^5}{40} - \dots,$$

وباستخدام المعادلة (2.7.7) لاقصاء القوى الزوجية للمتغير μ يصبح مفكوك hD
اخيرا كالتالي :

$$hD = \mu \left(\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \dots \right). \quad (2.7.14)$$

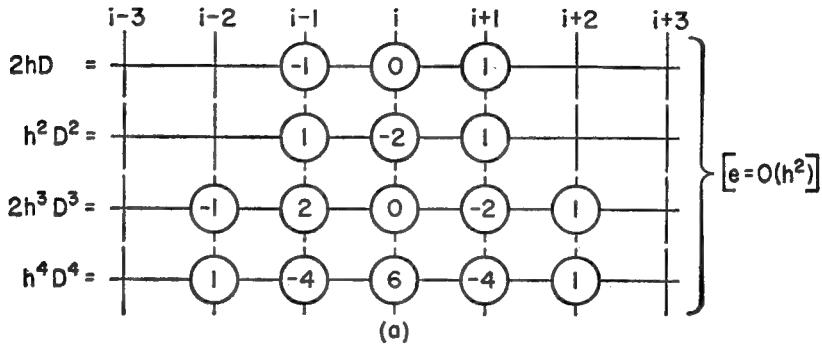
باخذ قوى hD واستعمال المعادلة (2.7.7) مرة اخرى للتخلص من قوى m الزوجية .
نحصل بالمثل على :

$$\begin{aligned} h^2 D^2 &= \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots; \\ h^3 D^3 &= \mu \left(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \dots \right); \\ h^4 D^4 &= \delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \dots \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

باستخدام الحد الاول في هذه المفكوكات ، يمكن تقرب مشتقات δ بدلالة مفكوكات
الفروق المركزية التي اعطي خطوها ϵ بدلالة الفروق ايضا

$$\begin{aligned}
2hDy_i &= (y_r - y_l) + 2\epsilon_1 \\
\left[\epsilon_1 &= \mu \left(-\frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \dots \right) y_i \right]; \\
h^2 D^2 y_i &= y_r - 2y_i + y_l + \epsilon_2 \\
\left[\epsilon_2 &= \left(-\frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots \right) y_i \right]; \quad [\epsilon = O(h^2)] \\
2h^3 D^3 y_i &= (y_{rr} - 2y_r + 2y_l - y_{ll}) + 2\epsilon_3 \quad (2.7.16) \\
\left[\epsilon_3 &= \mu \left(-\frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \dots \right) y_i \right]; \\
h^4 D^4 y_i &= y_{rrr} - 4y_{rr} + 6y_r - 4y_l + y_{lll} + \epsilon_4; \\
\left[\epsilon_4 &= \left(-\frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \dots \right) y_i \right].
\end{aligned}$$

بمقارنة هذه المعادلات بالمعادلات (2.7.9) الى (2.7.13) يثبت ان الخطأ في المشتقات المناظرة هو من مرتبة h^2 ولذلك فان الفروق المركزية الموسطة هي اكثر دقة من تعابير أي من الفروق التراجعية او الامامية كما ان من الممكن اثبات انه عند اخذ الحدين الاولين في هذه المفكوكات [معادلة (2.7.14) والمعادلة (2.7.15)] فان الخطأ في المشتقات المناظرة يكون من مرتبة h^4 ، وانه عند اخذ m من الحدود يكون الخطأ من مرتبة h^{2m} ان جزيئات الشكل 2.8 تعطي تعابير الفروق المركزية الاكثر شيوعا للمشتقات وهي ذات اخطاء من مرتبة h^4, h^2



$12hD =$	1	-8	0	8	-1	
$12h^2D^2 =$	-1	16	-30	16	-1	
$8h^3D^3 =$	1	-8	13	0	-13	8
$6h^4D^4 =$	-1	12	-39	56	-39	12
	-1					-1

$[e = O(h^4)]$

(b)

شكل (٨-٢) مؤثرات الفروق المركزية

2.8 قاعدة سترلنك للاستكمال *Sterling's Interpolation Formula*

من الممكن الحصول على قاعدة استكمال مبنية على الفروق المركزية الموصلة من مفكوك تيلر (المعادلة a بند 2.6) وذلك بالتعبير عن مشتقات y عند $x = a$ بدلالة الفروق المركزية المستخرجة في البند 2.7 كالتالي.

$$\begin{aligned}
 y(a + xh) &= \left[1 + \frac{x}{1!} hD + \frac{x^2}{2!} h^2D^2 + \frac{x^3}{3!} h^3D^3 + \dots \right] y(a) \\
 &= \left[1 + x\mu \left(\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \dots \right) + \frac{x^2}{2!} \left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \dots \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x^3}{3!} \mu \left(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \dots \right) + \frac{x^4}{4!} (\delta^4 - \dots) + \frac{x^5}{5!} (\delta^5 - \dots) + \dots \right] y(a) \\
 &= \left\{ 1 + x\mu\delta + \frac{x^2}{2!} \delta^2 + \frac{x(x^2 - 1)}{3!} \mu\delta^3 + \frac{x^2(x^2 - 1)}{4!} \delta^4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{5!} \mu\delta^5 + \dots + \frac{1}{(2k - 1)!} x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \dots \right. \\
 &\quad \left. [x^2 - (k - 1)^2] \mu\delta^{2k-1} + \frac{1}{2k!} x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4) \dots \right. \\
 &\quad \left. [x^2 - (k - 1)^2] \delta^{2k} + \dots \right\} y(a). \quad (2.8.1)
 \end{aligned}$$

ندعى المعادلة (2.8.1) بقاعدة سترلنك الاستكمالية.

مثلا بدلالة الجدول 2.8 حيث دونت $y = \tan \theta$ لقيم $\theta = 0(5^\circ)30^\circ$ نحسب قيمة $\tan 16^\circ$ ($a = 15^\circ$, $h = 5^\circ$, $x = 0.2$) كالتالي :

$$\begin{aligned}\tan 16^\circ &= 0.2679 + 0.2 \times 0.0938 + \frac{0.2^2}{2!} 0.0045 + \frac{0.2(0.2^2 - 1)}{3!} 0.0017 \\ &\quad + \frac{0.2^2(0.2^2 - 1)}{4!} \times 0.0000 = 0.2867.\end{aligned}$$

θ	$y = \tan \theta$	$\mu\delta y$		$\mu\delta^3 y$	$\delta^4 y$
0	0.0000				
5	0.0875	0.0882	0.0013		
10	0.1763	0.0902	0.0028	0.0016	0.0002
15	0.2679	0.0938	0.0045	0.0017	0.0000
20	0.3640	0.0992	0.0062	0.0022	0.0009
25	0.4663	0.1067	0.0088		
30	0.5774				

جدول ٨-٢

2.9 استكمال لكرانج لنقاط غير منتظمة التباعد

Lagrange's Interpolation for Unevenly Spaced Points

تبنى الصيغة الاستكمالية لنقاط الارتكاز غير منتظمة التباعد بامرار متعدد حدود من درجة n في $(n + 1)$ من النقاط. لنفرض اننا اعطينا النقاط التالية

$$(x_0, y_0); (x_1, y_1); (x_2, y_2); \dots; (x_n, y_n), \quad (2.9.1)$$

فمتعدد الحدود

$$P_k(x) \equiv C_k p_k(x) = C_k (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$$

يساوي صفر عند جميع x_i عدا x_k

ولكي تكون قيمة P_k تساوي واحد عند $x = x_k$ ينبغي كون :

$$C_k = \frac{1}{[(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)]} \quad (2.9.2)$$

وان التركيب الخطي لمتعددات الحدود ذات الدرجة n

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k P_k(x) \quad (2.9.3)$$

يمر خلال $(n + 1)$ من نقاط المعادلة (2.9.1) لأن

$$P_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

تسمى المعادلة (2.9.3) بصيغة استكمال لكرانج .

على سبيل المثال خذ النقاط التالية (13,20) ; (7,12) ; (3,5) ; (1,2) ;

لايجاد قيمتها تكون

$$C_0 = \frac{1}{(1-3)(1-7)(1-13)} = -\frac{1}{144};$$

$$C_1 = \frac{1}{(3-1)(3-7)(3-13)} = +\frac{1}{80};$$

$$C_2 = \frac{1}{(7-1)(7-3)(7-13)} = -\frac{1}{144};$$

$$C_3 = \frac{1}{(13-1)(13-3)(13-7)} = +\frac{1}{720}.$$

لايجاد قيمة $P(x)$ عند $x = 4$ نحسب $p_k(4)$

$$p_0(4) = (4-3)(4-7)(4-13) = 27,$$

$$p_1(4) = (4-1)(4-7)(4-13) = 81,$$

$$p_2(4) = (4-1)(4-3)(4-13) = -27,$$

$$p_3(4) = (4-1)(4-3)(4-7) = -9,$$

ومنها

$$P(4) = -\frac{27}{144}(2) + \frac{81}{80}(5) + \frac{27}{144}(12) - \frac{9}{720}(20) = 6.6875.$$

2.10 قواعد التكامل بدلالة استكمال القطوع المكافئة

Integration Formulas by Interpolating Parabolas

عندما لايمكن أن تستكمل دالة في حدود متتالية أو أن ايجاد قيمة التكامل قد تكون مرهقة فإنه من الملائم انجاز التكامل بالطرق العددية .

يمكن الحصول على ضروب من قواعد التكامل بامرار قطوع مكافئة في عدد من نقاط ارتكاز الدالة المكاملة (integrand) ثم استعمال المساحات تحت القطوع المكافئة كقيمة تقريبية للمساحة تحت الدالة المكاملة .

لو اعطينا قيم ارتكاز $f(x)$

$$\dots, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, \quad (a)$$

المنتظمة التباعد h . وأخذنا نقطة الأصل عند $x = x_i$ (دون فقدان العمومية) . فالمستقيم

$$f(x) = Ax + B$$

يمر من $(0, f_i)$. (h, f_{i+1}) بشرط أن يكون

$$A = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}; \quad B = f_i.$$

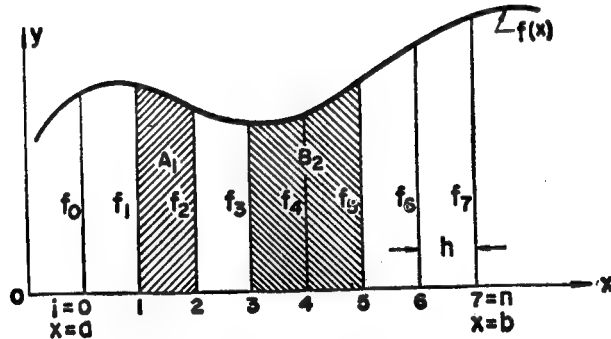
وعليه فإن القطع المكافئ من الدرجة الأولى هو

$$f(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} x + f_i \quad (b)$$

ونقرب المساحة تحت $f(x)$ بين $h, 0$ بالمقدار

$$A_1 = \int_0^h f(x) dx = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \left(\frac{h^2}{2} \right) + f_i h = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}). \quad (2.10.1)$$

تدعى هذه الصيغة بقاعدة الشبه المنحرف اذ أنها تقرب المساحة تحت شريحة واحدة بمساحة شبه منحرف . شكل 2.9



شكل (٢-٩)

ان القطع المكافئ من الدرجة الثانية

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (c)$$

يمر من النقاط

$$(-h, f_{i-1}), (0, f_i), (h, f_{i+1})$$

اذا كان

$$A = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}; \quad B = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}; \quad C = f_i. \quad (d)$$

والمساحة تحت هذا القطع المكافئ بين $-h$ ، h تكون

$$B_2 = \int_{-h}^h f(x) dx \doteq \frac{2h^3}{3} A + 2hC = \frac{h}{3} [f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}]. \quad (2.10.2)$$

هذه قاعدة سيمسون (Simpson) المتلثة لمساحة شريحتين عرض كل منها h بالمثل تكون مساحة شرائح تحت المقطع المكافئ (c)، (d) بين $-2h$ ، $+2h$

$$B_4 = \int_{-2h}^{2h} f(x) dx \doteq \frac{4h}{3} [2f_{i+1} - f_i + 2f_{i-1}]. \quad (2.10.3)$$

ان القطع المكافئ من الدرجة الثالثة

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (e)$$

له مساحة موزعة على ثلاث شرائح عرض كل منها h هي

$$C_3 = \int_{-3h/2}^{3h/2} f(x) dx = \frac{3}{2} Bh^3 + 3Dh \quad (f)$$

ومساحة شريحة واحدة هي

$$C_1 = \int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx = \frac{1}{12} Bh^3 + Dh. \quad (g)$$

ان المعاملات D ، B من القطع المكافئ (e) المار من النقاط f_0, f_1, f_2, f_3 هي

$$B = \frac{1}{4h^2} (f_0 - f_1 - f_2 + f_3);$$

$$D = \frac{1}{16} (-f_0 + 9f_1 + 9f_2 - f_3). \quad (h)$$

وعليه

$$C_1 = \int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx \doteq \frac{h}{24} (-f_0 + 13f_1 + 13f_2 - f_3); \quad (2.10.4)$$

$$C_3 = \int_{-3h/2}^{3h/2} f(x) dx \doteq \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3). \quad (2.10.5)$$

تعرف المعادلة (2.10.5) بأنها قاعدة الثلاثة أثمان لمبسوسن لمساحة ثلاث شرائح عرض كل منها h وفي متناولنا استخدامها مع قاعدة سمبسون الثانية لكي تغطي عدداً فردياً من الشرائح .

من الممكن استخراج عدد غير محدود من الصيغ بهذا الأسلوب ، كما أن أي عدد من هذه الصيغ قد يجمع للحصول على صيغ جديدة .

2.11 قواعد التكاملات بمتسلسلات تيلر

Integration Formulas by Taylor Series

لتقييم الخطأ المتأصل من صيغ التكامل التي اشتقت في البند 2.10 يكون من الضروري استخدام متسلسلات تيلر للحصول على هذه الصيغ كما تم سابقاً مع صيغ التفاضلات . بأخذ المشتقات المتعاقبة للتكامل

$$y(x) = \int_a^x f(z) dz; \quad (a)$$

$$y' = f(x); \quad y'' = f'(x); \quad \dots; \quad y^{(n)} = f^{(n-1)}(x); \quad \dots,$$

يصبح مفكوك تيلر للمقدار $y(x \pm h)$ حول x

$$y(x \pm h) = y(x) \pm \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) \pm \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (b)$$

وعليه فإن المساحة تحت شريحة واحدة وشريحتين هي

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_x^{x+h} f(z) dz = y(x+h) - y(x) \\ &= h \left[f(x) + \frac{1}{2!} h f'(x) + \frac{1}{3!} h^2 f''(x) + \dots \right]; \quad (2.11.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{x-h}^{x+h} f(z) dz = y(x+h) - y(x-h) \\ &= h[2f(x) + \frac{1}{3} h^2 f''(x) + \frac{1}{60} h^4 f^{iv}(x) + \dots]. \quad (2.11.2) \end{aligned}$$

لتعيين الخطأ في قاعدة الشبه المنحرف نعوض hf_i بدلالة الفرق الأمامي الأول من المعادلة (2.5.6)

$$\begin{aligned} A_1 &= h\{f_i + \frac{1}{2}(f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{6}h^2f_i'' - \frac{1}{12}h^3f_i''' - \dots\} + \frac{1}{6}h^2f_i'' + \dots \\ &= \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{h^3}{12}f_i'' - \frac{h^4}{24}f_i''' + \dots \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

يظهر من هذا أن الخطأ عند استعمال المعادلة (2.10.1) هو من مرتبة h^3 وبالمثل . عند التعويض في المعادلة (2.11.2) عن $h^2f''(x)$ بمفكوك فروقها المركزية من المعادلة (2.7.10)

$$\begin{aligned} B_2 &= h\{2f_i + \frac{1}{3}[f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}] - \frac{1}{12}h^2f_i'' - \dots\} + \frac{1}{6}h^2f_i'' + \dots \\ &= \frac{h}{3}(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}) - \frac{h^5}{90}f_i^{iv} + \dots, \end{aligned} \quad (2.11.4)$$

يتبين أن الخطأ في صيغة سيمبسون الثالثة [المعادلة (2.10.2)] هو من مرتبة h^5 كما يمكن ان نبين ان الخطأ في صيغة الثلاثة أثمان لسيمبسون هو من مرتبة h^5 بالمثل اذا عبر من $h^4f_i^{iv}$, h^2f_i'' بدلالة الفروق المركزية يمكن الحصول على I_4 بواسطة صيغة ذات خمسة نقاط خطأها من مرتبة h^7

$$D_4 = \frac{2h}{45}(7f_{i-2} + 32f_{i-1} + 12f_i + 32f_{i+1} + 7f_{i+2}) + O(h^7). \quad (2.11.5)$$

كما يمكن الحصول على صيغ I_2 (المساحة تحت شريحتين) ذات اخطاء من مرتبة $h^5, 11, 9, \dots$

ونستخرج بنفس الاسلوب ان لصيغة السبع نقاط مجموعة معاملات معقدة وخطؤها من مرتبة h^9 وغالبا ما تفضل صيغة ويدل (Weddle) الأكثر ملائمة وان كان خطأها من مرتبة h^7

$$E_6 = \frac{3h}{10}(f_{i-3} + 5f_{i-2} + f_{i-1} + 6f_i + f_{i+1} + 5f_{i+2} + f_{i+3}) + O(h^7). \quad (2.11.6)$$

يمكن اشتقاق صيغ احادية الجانب ، وخطأ من أي مرتبة . بسهولة وذلك بتكامل صيغ استكمال نيوتن بين a و $a+h$

$$I_1 = h \int_0^1 \left[1 + x\Delta + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 + \dots \right] f(a) dx$$

$$= h \left[1 + \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{12} \Delta^2 + \frac{1}{24} \Delta^3 - \frac{19}{720} \Delta^4 + \dots \right] f(a). \quad (2.11.7)$$

بأخذ حدين من حدود المتسلسلة تعطي المعادلة (2.11.7)

$$A_1 = h \left[1 + \frac{1}{2} \Delta \right] f(a) = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) + O(h^2).$$

بأخذ ثلاثة حدود من المتسلسلة نحصل على

$$B_1 = h \left[1 + \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{12} \Delta^2 \right] f(a) = \frac{h}{12} [5f_i + 8f_{i+1} - f_{i+2}] + O(h^4). \quad (2.11.8)$$

وبأربعة حدود المعادلة (2.11.7) تعطي .

$$C_1 = h \left[1 + \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{12} \Delta^2 + \frac{1}{24} \Delta^3 \right] f(a)$$

$$= \frac{h}{24} (9f_i + 19f_{i+1} - 5f_{i+2} + f_{i+3}) + O(h^5). \quad (2.11.9)$$

عندما يقتضي بسط التكامل العددي الى عدد كبير من الشرائح عرض كل منها h فانه يمكن جمع المعادلات المشتقة اعلاه وتقديم تراكيب احداثيات المركبات الناتجة من هذا الجمع على شكل « جزئيات رياضية » مع مرتبة الخطأ المتراكم .

ان تكاملا منبسطا على n من الشرائح $x = a$ الى $x = b$ ، حسب قاعدة

الشبه المنحرف المعادلة (2.11.3) ، مثلا ، يعطى بالمعادلة :

$$\frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx = \left(\frac{1}{2} \right) f(a) + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1} + \left(\frac{1}{2} \right) f(b) + \frac{1}{h} O(h^2)$$

(a) Trapezoidal Rule

$$\frac{3}{h} \int_a^b f(x) dx = f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n + \frac{1}{h} O(h^4)$$

(b) Simpson's Rule

شكل (١٠-٢) قاعدة سيمبسون

$$A = h \left[\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right] + e_i, \quad (2.11.10)$$

حيث يصبح الخطأ المتراكم ، حسب نظرية المتوسط . تقريبا

$$e_t \doteq -\frac{h^3}{12} (f_0'' + f_1'' + \dots + f_{n-1}'') = -h^2 \frac{nh}{12} f''(\bar{x}_n) = -h^2 \frac{b-a}{12} f''(\bar{x}_n) \quad (2.11.11)$$

وهو من مرتبة h^2

ان نفس المساحة المنبسطة على عدد زوجي من الشرائح h : تصبح حسب قاعدة سيمبسون الثنائية معادلة (2.11.4)

$$A = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{n-1} + f_n] + e_s, \quad (2.11.12)$$

حيث ان الخطأ بصورة تقريبية

$$\begin{aligned} e_s &\doteq -\frac{h^5}{90} [f_1^{iv} + f_3^{iv} + \dots + f_{n-1}^{iv}] \\ &= -\frac{h^4}{90} \frac{n}{2} h f^{iv}(\bar{x}_n) = -h^4 \frac{b-a}{180} f^{iv}(\bar{x}_n) \end{aligned} \quad (2.11.13)$$

وهو من مرتبة h^4

ان شكل 2.10 يعطي « جزئيات » قانوني الشبه المنحرف وسيمبسون الثنائي .
لقد حسب التكامل التالي

$$A = \int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2 \quad (c)$$

في الجدول 2.9 بطريقة شبه المنحرف وفي الجدول 2.10 بطريقة سمبسون الثالثة
شكل (٢-٩)

Numerical Integration by the Trapezoidal Rule

		$n = 2$ $h = \pi/2$		$n = 4$ $h = \pi/4$	
x	$\sin x$	M		M	
0	0	1/2	0	1/2	0
$\pi/4$	0.707			1	0.707
$\pi/2$	1.000	1	1.000	1	1.000
$3\pi/4$	0.707			1	0.707
π	0	1/2	0	1/2	0
		$\Sigma_2 =$	1.000	$\Sigma_4 =$	2.414

$n = 6$ $h = \pi/6$			
x	$\sin x$	M	
0	0	1/2	0
$\pi/6$	0.500	1	0.500
$\pi/3$	0.866	1	0.866
$\pi/2$	1.000	1	1.000
$2\pi/3$	0.866	1	0.866
$5\pi/6$	0.500	1	0.500
π	0	1/2	0
		$\Sigma_6 =$	3.732

جدول (٢-٩)

$$A_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1.000 = 1.571; \quad e_2 = \frac{2 - 1.571}{2} \cdot 100 = 21 \text{ per cent.}$$

$$A_4 = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2.414 = 1.896; \quad e_4 = \frac{2 - 1.896}{2} \cdot 100 = 5.2 \text{ per cent.}$$

$$A_6 = \left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 3.732 = 1.954; \quad e_6 = \frac{2 - 1.954}{2} \cdot 100 = 2.3 \text{ per cent.}$$

إذا ما أضيفت شريحة واحدة ذات عرض $h = \pi/4$ إلى التكامل بقاعدة سمبسون في حالة $n = 4$ فإن المعادلة (2.10.5) تعطي للشرائح الثلاثة الأخيرة ذات القيم

$$f_3 = -0.707; \quad f_2 = 0; \quad f_1 = 0.707; \quad f_0 = 1.000;$$

$$\Delta A = \frac{3\pi}{8 \times 4} (1.000 + 3 \times 0.707 + 3 \times 0 - 0.707) = 0.711 \quad (e = 0.57\%)$$

Table 2.10
Numerical Integration by Simpson's 1/3 Rule

		$n = 2$ $h = \pi/2$		$n = 4$ $h = \pi/4$	
x	$\sin x$	M		M	
0	0	1	0	1	0
$\pi/4$	0.707			4	2.828
$\pi/2$	1.000	4	4	2	2.000
$3\pi/4$	0.707			4	2.828
π	0	1	0	1	0
		$\Sigma_2 =$	4	$\Sigma_4 =$	7.656

جدول (٢-١٠)

$$A_2 = \frac{\pi/2}{3} \cdot 4 = 2.094; \quad e_2 = 4.7 \text{ per cent.}$$

$$A_4 = \frac{\pi/4}{3} \cdot 7.656 = 2.004; \quad e_4 = 0.23 \text{ per cent.}$$

(ان هذا الخطأ الكبير سببه كبر معامل h النسبي في الخطأ من هذه القاعدة)
بإضافة مساحة الشريحتين الأولىين :

$$\Delta A_2 = \frac{\pi}{3 \times 4} (0 + 4 \times 0.707 + 1.000) = 1.002 \quad (e = 0.2\%);$$

تصبح مساحة الشرائح الخمسة

$$A = 1.713 \quad (e = 0.35\%)$$

2.12 التكامل بنقاط ارتكاز غير منتظمة التباعد

Integration with Unevenly Spaced Pivotal Points

ينجز التكامل بنقاط ارتكاز غير منتظمة التباعد بقاعدة الشبه المنحرف بجعل h متغيرة
أو بصيغة من نمط سمبسون مستخرجة بدلالة ثلاث احداثيات صادية بتباعد ah, h بوضع
 h, ah -بدلاً من h في المعادلة (b) من البند 2.11

$$y(x + ah) = y(x) + \frac{ah}{1!} f'(x) + \frac{\alpha^2 h^2}{2!} f''(x) + \frac{\alpha^3 h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$y(x - h) = y(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots,$$

i	x_i	h	f_i	$(h_{i-1/2} + h_{i+1/2})f_i$	$f_{i+1} + 3f_i$	$h_{i-1/2}(f_{i+1} + 3f_i)$	$3f_i + f_{i-1}$	$h_{i-1/2}(3f_i + f_{i-1})$	i
0	0	0.1	1.000	0.100					4
1	0.1	0.2	0.905	0.272	3.456	0.346	3.456	0.691	3
2	0.3	0.4	0.741	0.445					2
3	0.7	0.8	0.497	0.596	1.714	0.686	1.714	1.371	1
4	1.5		0.223	0.178					0
Σ				1.591	Σ	0.886	Σ	2.062	
$A = 0.795$					$A = 0.774$		$A = 0.773$		
$e\% = 2.3$					$e\% = 0.5$		$e\% = 0.5$		

جدول (٢-١١)

تصبح مساحة شريحتين غير متساويتين

$$y(x + \alpha h) - y(x - h) = h \left[(\alpha + 1)f(x) + \frac{\alpha^2 - 1}{2!} hf'(x) + \frac{(\alpha^3 + 1)}{3!} h^2 f''(x) + \dots \right],$$

وبتعويض $hf'(x)$ و $h^2 f''(x)$ ضمن المعادلتين (2.3.4) و (2.3.5) نحصل على

$$B_2 = \frac{h}{3} \frac{\alpha + 1}{2\alpha} [(2\alpha - 1)f_{i+1} + (\alpha + 1)3f_i + \alpha(2 - \alpha)f_{i-1}] + 0(h^2) \quad (2.12.2)$$

يعطينا جدول 2.11 تكامل الدالة $y = e^{-x}$ بين 1.5 و 0 بالمعادلة (2.12.1) وبالمعادلة (2.12.2) مع

$2 = \alpha$ بحيث ان

$$B_2 = \frac{3}{4} h_{i-1/2} (f_{i+1} + 3f_i)$$

واخيراً بالمعادلة (2.12.2) مع $\frac{1}{2} = \alpha$ أي مكاملين من $x = 1.5$ الى $x = 0$ بحيث

$$B_2 = \frac{3}{8} h (3f_i + f_{i-1}).$$

2.13 استيفاءات ريجارد سن Richardson's Extrapolations

كما سبق ظهر لنا ان الخطأ في معادلات الفروق للتفاضل والتكامل يعتمد على التباعد h بين نقاط الارتكاز وانه من مرتبة h^2 او h^4 في صيغ التقريب الاحسن ، فقيمة المشتقة التي نحصل عليها بأخذ حد واحد من مفكوك فروقها المركزية وقيمة التكامل الذي نحصل عليه من قاعدة الشبه المنحرف ، يكون الخطأ فيهما من مرتبة h^2 بينما يكون الخطأ في قيمة المشتقة التي نحصل عليها بأخذ حدين من حدود مفكوك فروقها المركزية وقيمة التكامل بطريقة سمبسون الثالثة من مرتبة h^4

ان مرتبة هذه الاخطاء تقتنى بأخذ الحدود العليا من المفكوكات بنظر الاعتبار ، غير ان القاريء سيلاحظ ان الخطأ ، في جميع الحالات اعلاه ، في تعابير الفروق المركزية للمشتقات عند نقطة ما ، x ، يمثل بمتسلسلة من نوع :

$$e(x) = f_1(x)h^2 + f_2(x)h^4 + f_3(x)h^6 + \dots \quad (2.13.1)$$

عندما يكون التعبير المقيم بالفروق مستقلاً عن x . كما في حالة التكاملات المحددة ، او عندما يحسب الخطأ بقيم تباعد h مختلفة في نفس النقطة x : فان لمتسلسلة الخطأ معاملات ثابتة ويمكن كتابتها .

$$e = c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \dots \quad (2.13.2)$$

وعليه فان قيمة $f(x)$ في مفكوكات الاخطاء من مرتبة h^4 ، مثلاً . تساوي صفرًا وسنين هنا ان المعرفة بصيغة الخطأ تسمح باعطاء تقريب افضل عند حساب قيم المشتقات والتكاملات باقل جهد اضافي .

لنفرض ان قيمة التكامل A قد حسبت عددياً باستخدام n_1 و n_2 من الشرائح طبقاً لقاعدة الشبه المنحرف ، أي باخذ

$$h_1 = \frac{b-a}{n_1}; \quad h_2 = \frac{b-a}{n_2},$$

اجعل A_{n_1} و A_{n_2} القيمتين التقريبيتين المتناظرتين . فاذا كانت كل من h_1 و h_2 صغيرة لدرجة تسمح لنا باهمال جميع حدود المعادلة (2.13.2) عدا الحد الاول فإنه يمكن ان نكتب

$$e_1 \equiv A - A_{n_1} \doteq \frac{c_1(b-a)^2}{n_1^2}; \quad e_2 \equiv A - A_{n_2} \doteq \frac{c_1(b-a)^2}{n_2^2},$$

حيث c_1 مجهولة . بحذف الثوابت المجهولة $c_1(b - a)^2$ من هاتين المعادلتين ثم حلها لقيم A الصحيحة نحصل على ما يسمى بصيغة استيفاء h^2

$$A_{n_1, n_2} = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} A_{n_2} - \frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2} A_{n_1} = \alpha_1 A_{n_1} + \alpha_2 A_{n_2}, \quad (2.13.3)$$

التي تعطي تقريباً ممتازاً لقيمة A كلما كانت الحدود العليا من متسلسلة الخطأ قابلة للاهمال .

مثلاً بأخذ $A_2 = 1.571$ و $A_4 = 1.896$ من جدول 2.9 تكون قيمة التكامل الوارد في بند 2.11 تبعاً للمعادلة (2.13.3)

$$\begin{aligned} A_{2,4} &= \frac{4^2}{4^2 - 2^2} 1.896 - \frac{2^2}{4^2 - 2^2} 1.571 \\ &= \frac{4}{3} \cdot 1.896 - \frac{1}{3} \cdot 1.571 = 2.004, \end{aligned}$$

بخطأ قدره 0.2 بالمائة مقابل خطأ قدره 21 بالمائة 5.2 بالمائة في A_4, A_2 على التناظر . باعادة الحساب لقيمة $n = 6, n = 4$ نحصل على :

$$A_{4,6} = \frac{6^2}{6^2 - 4^2} 1.954 - \frac{4^2}{6^2 - 4^2} 1.896 = 2.0004,$$

بخطأ قدره 0.02 بالمائة
ان جدول 2.12 يعطي المعاملات

$$\alpha_1 = -\frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2}; \quad \alpha_2 = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} \quad (2.13.4)$$

التي هي معاملات صيغة استيفاء h^2 معادلة (2.13.3) لنسب n_2, n_1 الاكثر ورودا لان المعادلة (2.13.4) تعتمد على النسب n_2/n_1 فقط .

Table 2.12
h²-Extrapolation Coefficients

n_2/n_1	α_1	α_2
2/1	-0.3333333333	1.3333333333
3/2	-0.8	1.8
4/3	-1.2857142857	2.2857142857
5/4	-1.7777777778	2.7777777778
6/5	-2.2727272727	3.2727272727
7/6	-2.7692307692	3.7692307692
8/7	-3.2666666667	4.2666666667
3/1	-0.125	1.125
5/3	-0.5625	1.5625
7/5	-1.0416666667	2.0416666667

جدول (١٧-٧) معاملات استيفاء h^2

عند حساب ثلاثة تقريبات $A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3}$ لقيمة A بثلاثة فواصل h_3, h_2, h_1 تتناسب عكسياً مع n_3, n_2, n_1 يمكن ان نأخذ حدين من حدود معادلة الخطأ (2.13.2) ونكتب

$$e_1 \equiv A - A_{n_1} = \frac{c_1(b-a)^2}{n_1^2} + \frac{c_2(b-a)^4}{n_1^4};$$

$$e_2 \equiv A - A_{n_2} = \frac{c_1(b-a)^2}{n_2^2} + \frac{c_2(b-a)^4}{n_2^4};$$

$$e_3 \equiv A - A_{n_3} = \frac{c_1(b-a)^2}{n_3^2} + \frac{c_2(b-a)^4}{n_3^4}.$$

بحذف الثابتين المجهولين $c_1(b-a)^2, c_2(b-a)^4$ من هذين المعادلات وحلها لقيمة A الصحيحة نحصل على صيغة استيفاء (h^2, h^4)

$$A_{n_1, n_2, n_3} = \frac{n_1^4}{(n_2^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_1^2)} A_{n_1} - \frac{n_2^4}{(n_2^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_2^2)} A_{n_2} \\ + \frac{n_3^4}{(n_3^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_2^2)} A_{n_3} \equiv \beta_1 A_{n_1} + \beta_2 A_{n_2} + \beta_3 A_{n_3}, \quad (2.13.5)$$

حيث اعطيت معاملاتها في جدول 2.13 لنسب $n_3/n_2/n_1$

Table 2.13
(h^2, h^4)—Extrapolation Coefficients

$n_3/n_2/n_1$	β_1	β_2	β_3
3/2/1	0.0416666667	-1.0666666667	2.025
4/2/1	0.0222222222	-0.4444444444	1.4222222222
4/3/2	0.2666666667	-2.3142857143	3.0476190476
5/4/2	0.6349206349	-2.3703703704	3.3068783069
5/4/3	0.7232142857	-4.0634920635	4.3402777778
6/5/4	1.4222222222	-6.3131313131	5.8909090909
7/6/5	2.3674242424	-9.0629370629	7.6955128205
8/7/6	3.5604395604	-12.3128205128	9.7523809524
5/3/1	0.0052083333	-0.6328125	1.6276041667
7/5/3	0.1265625	-1.6276041667	2.5010416667

جدول (١٣-٢) معاملات استيفاء (h^2, h^4)

على سبيل المثال . باستخدام التقريبات الثلاثة A_6, A_4, A_2 للتكامل (c) من بند 2.11 من جدول 2.9 والمعاملات β المناظرة للنسب $3/2/1 = 6/4/2$ من جدول 2.13 نحصل على

$$A_{2,4,6} = 0.04167 \cdot 1.571 - 1.06667 \cdot 1.896 + 2.025 \cdot 1.954 = 1.99991,$$

بخطأ قدره 0.005 بالمائة

عندما تكون مرتبة الخطأ h^4 تكون قيمة $e_1 = 0$ في المعادلة (2.13.2) . وبأخذ الخطأ في تقريبين متعاقبين باستعمال n_1 و n_2 فترات ثانوية الشكل التالي

$$e_1 \equiv A - A_{n_1} = \frac{c_2(b-a)^4}{n_1^4} + \frac{c_3(b-a)^6}{n_1^6} + \dots$$

$$e_2 \equiv A - A_{n_2} = \frac{c_2(b-a)^4}{n_2^4} + \frac{c_3(b-a)^6}{n_2^6} + \dots$$

بأخذ الحد الاول فقط واهمال الحدود الاخرى في متسلسلة الخطأ وبعد الحل لقيمة A

نحصل على صيغة استيفاء h^4 التالية

$$A_{n_1, n_2} = \frac{n_2^4}{n_2^4 - n_1^4} A_{n_2} - \frac{n_1^4}{n_2^4 - n_1^4} A_{n_1} = \gamma_1 A_{n_1} + \gamma_2 A_{n_2}, \quad (2.13.6)$$

التي تظهر معاملاتها في جدول 2.14 *

h^4 —Extrapolation Coefficients

n_2/n_1	γ_1	γ_2
2/1	-0.066666667	1.066666667
3/2	-0.2461538462	1.2461538462
4/3	-0.4628571429	1.4628571429
5/4	-0.6937669377	1.6937669377
6/5	-0.9314456036	1.9314456036
7/6	-1.1728506787	2.1728506787
8/7	-1.4165191740	2.4165191740
3/1	-0.0125	1.0125
5/3	-0.1488970588	1.1488970588
7/5	-0.3519144144	1.3519144144

جدول ٢-١٤ معاملات استيفاء h^4

مثال ذلك باستعمال القيمتين A_4, A_2 للتكامل (c) من بند 2.11 في جدول 2.10 المعد بقاعدة سمسون . التي يكون الخطأ فيها من مرتبة h^4 . والمعاملات في جدول 2.14 للقيم $n_2/n_1 = 2/1$ نحصل على الاستيفاء التالي

$$A_{2,4} = -0.06667 \cdot 2.094 + 1.06667 \cdot 2.004 = 1.998,$$

بخطأ مقداره هو 0.1 بالمائة

كمثال آخر للاستيفاء خذ القيم التقريبية للمشتقة الاولى لدالة بسل Bessel $J_{3/4}(x)$ عند $x = 0.5$ التي يمكن حسابها بسهولة باستخدام مؤثر الفروق المركزية المعادلة (2.7.16)

$$J'_{3/4}(0.5) \doteq \frac{1}{2h} [J_{3/4}(0.5 + h) - J_{3/4}(0.5 - h)]$$

لقيم $h = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ ان قيم المشتقة تظهر في العمود الثالث في جدول 2.15 . بما ان تقرب المشتقات باستخدام الفروق المركزية يتضمن اخطاء من نوع المعادلة (2.13.1) فانه يمكن حساب قيمة استيفاء $h^2, (h^2, h^4)$ في هذه الحالة عند قيمة x لـ $n_2/n_1 = 2/1$ ولـ $n_2/n_1 = 4/2/1$

() الجداول 2.14, 2.13, 2.12 حسب في Applicazioni Istituto Nazionale le المختبر الرياضي الوطني

للابحاث من قبل الاستاذ Mauro Picone

هناك جداول تامة للمؤلف نفسه طبعت في شيكاغو سنة 1952 تحت اسم

“First U.S. Congress of Applied Mechanics,” A.S.M.E.,

من جدولي المعاملات 2.12, 2.13 . ان هذه القيم تظهر في جدول 2.15 مع النسب المئوية للاخطاء المناظرة محسوبة من القيمة الصحيحة $J'_{1/4}(0.5) = 0.21909$

Table 2.15

Approximations				h^2 -Extrapolations		
h	n	$J'_{1/4}(0.5)$	$e(\%)$	n	$J'_{1/4}(0.5)$	$e(\%)$
0.4	1	0.30377	+38.6	2/1	0.20994	-4.2
0.2	2	0.23340	+6.5	4/2	0.21873	-1.6
0.1	4	0.22240	+1.5	8/4	0.21906	-0.013
0.05	8	0.21990	+0.37

(h^2, h^4) -Extrapolations		
n	$J'_{1/4}(0.5)$	$e(\%)$
4/2/1	0.21931	+0.10
8/4/2	0.21908	-0.004

جدول ٢-١٥

ان الجدول يبرهن مرة ثانية على انه يمكن تخفيض الخطأ بالاستيفاء وبجهد اضافي قليل جداً .
ينبغي عدم استخدام طريقة الاستيفاء اذا كانت التقريبات المتعاقبة لا تقترب من القيمة الحقيقية بصورة مطردة (monotonically) لأنه لا يمكن اهمال الحدود العليا من متسلسلات الخطأ .

تمارين

اعطينا ثلاثة قيم y_2, y_1, y_0 لنقاط موزعة بمسافات منتظمة . عيّن المشتقات الاولى والمشتقات الثانية ل y عند كل من (a) 0 و (b) 1 و (c) 2 باستخدام قطع مكافئة الاستكمال وقيم الدالة عند تلك النقاط .

الاجوبة

$$(a) y'_0 = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2). \quad (b) y'_1 = \frac{1}{2h} (-y_0 + y_2).$$

$$(c) y'_2 = \frac{1}{2h} (y_0 - 4y_1 + 3y_2); y''_{0,1,2} = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2}.$$

اعطينا أربعة قيم y_3, y_2, y_1, y_0 لنقاط موزعة بصورة منتظمة . استخدم الاستكمال بطريقة القطر المكافئة لتعيين مشتقات y العالية بدلالة هذه القيم المعطاة عند جميع هذه النقاط الأربعة .

الاجوبة

- (a) y'_2 . (b) y'_1 . (c) y'_0 . (d) y''_0 . (e) y''_2 . (f) y''_3 .
 (b) $y'_1 = (1/6h)(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3)$.
 (d) $y''_0 = (1/h^2)(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3)$.
 (f) $y''_3 = (1/h^2)(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3)$.

2.3 جد صيغة تقريبية الى y'_i مستخدماً طريقة استكمال قطع مكافئ ماراً من نقاط شكل 2.2

الاجوبة

$$Ans. y'_i = \frac{y_i - (1 - \alpha^2)y_{i-1} - \alpha^2 y_{i+1}}{h\alpha(1 + \alpha)}.$$

2.4 جد صيغة تقريبية لـ y'''_i باستخدام طريقة استكمال قطع مكافئ يمر من نقاط شكل 2.3a

2.5 اعطيت قيم دالة لنقاط منتظمة البعد $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$ استخدم متسلسلة مفكوك تيلر للتعبير عن المشتقات التالية بترتيب الاخطاء المؤشرة. عين الحد الاول من متسلسلة الاخطاء

س

- (a) $y'_0; e = O(h^2)$. (b) $y'_1; e = O(h^2)$.
 (c) $y'_2; e = O(h^2)$. (d) $y''_0; e = O(h)$.
 (e) $y'_1; e = O(h^2)$. (f) $y'_2; e = O(h^3)$.
 (g) $y'_1; e = O(h^3)$. (h) $y'_0; e = O(h^3)$.
 (i) $y''_0; e = O(h^2)$. (j) $y'_3; e = O(h^2)$.

الاجوبة

- (a) $y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}; e \doteq \frac{h^2 y'''_0}{3}$.
 (c) $y'_2 = \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}; e \doteq \frac{h^2 y'''_2}{3}$.
 (e) $y''_1 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2}; e \doteq -\frac{h^2 y^{iv}_1}{12}$.
 (g) $y'_1 = \frac{-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3}{6h}; e \doteq \frac{h^3 y^{iv}_1}{12}$.
 (i) $y''_0 = \frac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2}; e \doteq \frac{11h^2 y^{iv}_0}{12}$.

2.6 إذا أعطيت القيم الخمسة التالية y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 عند خمسة نقاط منتظمة المسافات استخدم مهسلة مفكوك تيلر لإيجاد مشتقات y التالية بدلالة هذه القيم الخمسة جميعها واعط الحد الاول من متسلسلة خطاه في كل حالة

(a) $y_1'; e = O(h^4)$.

(b) $y_2''; e = O(h^4)$.

(c) $y_0'''; e = O(h^2)$.

(d) $y_0'; e = O(h^3)$.

(e) $y_2'''; e = O(h^2)$.

الاجوبة

Ans. (a) $y_1' = \frac{1}{24h} (-6y_0 - 20y_1 + 36y_2 - 12y_3 + 2y_4);$

$e \doteq -\frac{1}{80}h^4 y_1^{(5)}.$

(c) $y_0''' = \frac{1}{4h^3} (-10y_0 + 36y_1 - 48y_2 + 28y_3 - 6y_4);$

$e \doteq \frac{7}{12}h^2 y_0^{(5)}.$

(e) $y_2''' = \frac{1}{4h^3} (-2y_0 + 4y_1 - 4y_3 + 2y_4);$

$e \doteq -\frac{1}{4}h^2 y_2^{(5)}.$

2.7 أعطيت القيم الستة $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ عند نقاط منتظمة البعد . استخدم متسلسلة مفكوك تيلر للتعبير عن المشتقات التالية بدلالة هذه القيم الستة المعطاة ثم اعط الحد الاول من متسلسلة الاخطاء في كل حالة .

الاجوبة

(a) $y_4''; e = O(h^4)$.

(b) $y_3^{(4)}; e = O(h^2)$.

(c) $y_2'; e = O(h^4)$.

Ans. (a) $y_4'' = \frac{1}{60h^2} (5y_0 - 30y_1 + 70y_2 - 20y_3 - 75y_4 + 50y_5);$

$e \doteq -\frac{1}{80}h^4 y_4^{(6)}.$

(b) $y_3^{(4)} = \frac{1}{5h^4} (5y_1 - 20y_2 + 30y_3 - 20y_4 + 5y_5); e \doteq -\frac{1}{6}h^2 y_3^{(6)}.$

(c) $y_2' = \frac{1}{120h} (6y_0 - 60y_1 - 40y_2 + 120y_3 - 30y_4 + 4y_5);$

$e \doteq -\frac{1}{80}h^4 y_2^{(6)}.$

الاجوبة

2.8 اشتق المعادلة (2.3.6) من بند 2.3 وذلك باستخدام متسلسلة مفكوك تيلر بعد

ذلك برهن ان الخطأ فيها هو من رتبة h^2 . استخدم النقاط في شكل 2.3a

2.9 اشتق المعادلة (2.3.7) من بند 2.3 باستخدام متسلسلة مفكوك تيلر ثم برهن ان

الخطأ هو من مرتبة h^2 . استخدم النقاط في شكل 2.3b

2.10 استخدم متسلسلة تيلر لتحديد تقريب صيغة النقاط الأربعة لـ y_i''' والحد الأول

من متسلسلة الخطأ باستخدام النقاط في شكل 2.3a .

الاجوبة

$$\text{Ans. } y_i''' = \frac{6y_r + 6\alpha(2 + \alpha)y_l - 3\alpha(1 + \alpha)y_u - 3(1 + \alpha)(2 + \alpha)y_i}{h^3\alpha(1 + \alpha)(2 + \alpha)};$$

$$e \doteq \frac{7(1 + \alpha) - (1 + \alpha^3)}{4\alpha(1 + \alpha)(2 + \alpha)} h y_i^{iv}.$$

2.11 بواسطة متسلسلة تيلر عين صيغة النقاط الخمسة للتقريب لـ y_i''' والحد الأول المناظر

في متسلسلة الخطأ مستخدما النقاط الواردة في شكل 2.11 الموزعة توزيعا منتظما

على مسافات قدرها h عدا المسافة الأخيرة على مسافة ah .

الاجوبة

$$\text{Ans. } y_i''' = [36y_r + (\alpha^4 - 25\alpha^2 - 60\alpha - 36)y_l + (-3\alpha^4 + 57\alpha^2 + 90\alpha)y_l$$

$$+ (3\alpha^4 - 39\alpha^2 - 36\alpha)y_u + (-\alpha^4 + 7\alpha^2 + 6\alpha)y_u] / h^3(\alpha^4 + 18\alpha^3 +$$

$$11\alpha^2 - 6\alpha);$$

$$e \doteq \frac{h^2(12\alpha^5 + 50\alpha^4 - 170\alpha^2 - 132\alpha)y_i^{iv}}{40(\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha)}.$$

2.12 عين صيغة التقريب لخمسة نقاط لـ y_i^{iv} باستخدام متسلسلة تيلر والحد الأول من

متسلسلة الخطأ المقابل لها بواسطة النقاط في التمرين 2.11

اجوبة

$$\text{Ans. } y_i^{iv} = [24y_r - (12\alpha^3 + 24\alpha^2 + 36\alpha + 24)y_l + (36\alpha^3 + 60\alpha^2 + 48\alpha)y_l$$

$$- (36\alpha^3 + 48\alpha^2 + 12\alpha)y_u + (12\alpha^3 + 12\alpha^2)y_u] / h^4(\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2$$

$$- 6\alpha);$$

$$e \doteq \frac{h(-12\alpha^5 + 900\alpha^3 + 720\alpha^2 - 168\alpha)y_i^{iv}}{6(\alpha^4 + 18\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha)}.$$

2.13 اعطيت القيم التالية $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots$ لنقاط منتظمة المسافات ، جد صيغ

تقريبية لكل مما يأتي $y_i''', (a) y_i^{iv}, (b) y_i^{iv}, (c) y_i''$ مع الاخطاء التي من مرتبة h

باستخدام

- (1) مفكوك الفروق الخلفية (التراجعية)
 (2) قطع مكافئ الاستكمال مارا من أربعة نقاط ، خمسة نقاط ، ستة نقاط
 على التوالي ، الواقعة على يسار i
 (3) متسلسلة مفكوك تيلر
 جد حيث كان ممكنا الحد الأول من متسلسلة الاخطاء

اجوبة

Ans. (a) $y_i''' = \frac{1}{h^3} (y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3})$.
 (b) $y_i^{iv} = \frac{1}{h^4} (y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} + y_{i-4})$.
 (c) $y_i^v = \frac{1}{h^5} (y_i - 5y_{i-1} + 10y_{i-2} - 10y_{i-3} + 5y_{i-4} - y_{i-5})$.

- 2.14 جد بصورة تقريبية صيغة لكل من المشتقات التالية مستخدما حدين من حدود مفكوك فروقها الخلفية ، ثم جد الحد الأول من متسلسلات الاخطاء المقابلة لها.

اجوبة

(a) y_i' . (b) y_i'' . (c) y_i''' . (d) y_i^{iv} .
 Ans. (b) $y_i'' = \frac{1}{h^2} (2y_i - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3})$; $e \doteq \frac{1}{2}h^2 y_i^{iv}$.
 (d) $y_i^{iv} = \frac{1}{h^4} (3y_i - 14y_{i-1} + 26y_{i-2} - 24y_{i-3} + 11y_{i-4} - 2y_{i-5})$;
 $e \doteq \frac{3}{8}h^4 y_i^{vi}$.

- 2.15 اعطيت القيم $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots$ لنقاط منتظمة المسافات عيّن تعابير تقريبية لكل من y_i''' (a), y_i^{iv} (b), y_i^v (c) مع الاخطاء من رتبة h باستخدام الطرق التالية

- (1) مفكوك الفروق الأمامية
 (2) الاستكمال بواسطة القطوع المكافئة المارة من اربعة نقاط ، خمسة نقاط ،
 ست نقاط على التوالي الواقعة على يمين i .
 (3) متسلسلة مفكوك لتيلر

استخرج كلما أمكن ذلك الحد الأول من متسلسلات الأخطاء

الاجوبة

Ans. (a) $y_i''' = \frac{1}{h^3} (y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i).$

(b) $y_i^{iv} = \frac{1}{h^4} (y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i).$

(c) $y_i^v = \frac{1}{h^5} (y_{i+5} - 5y_{i+4} + 10y_{i+3} - 10y_{i+2} + 5y_{i+1} - y_i).$

2.16 عين تعبيراً تقريبياً للمشتقات التالية مستخدماً حدين من حدود مفكوك الفروق الخلفية . وعين كذلك الحد الأول من متسلسلة الخطأ لكل حالة .

(a) y_i' . (b) y_i'' . (c) y_i''' . (d) y_i^{iv} .

Ans. (b) $y_i'' = \frac{1}{h^2} (2y_i - 5y_{i+1} + 4y_{i+2} - y_{i+3}); e \doteq \frac{1}{12}h^2 y_i^{iv}.$

(d) $y_i^{iv} = \frac{1}{h^4} (3y_i - 14y_{i+1} + 26y_{i+2} - 24y_{i+3} + 11y_{i+4} - 2y_{i+5});$
 $e \doteq \frac{3}{12}h^2 y_i^{vi}.$

2.17 اشتق بالتعويض المباشر لمفكوكات الفروق في متسلسلات تيلر (a) في بند 2.6 كلا مما يأتي :

(a) صيغة الاستكمال الأمامي لكريكوري - نيوتن

(b) صيغة الاستكمال التراجعي لكريكوري - نيوتن

2.18 أعطيت $\tan x$ لقيم $x = 23^\circ(1')28''$ احسب لخمس أرقام معنوية
 (a) $\tan 23^\circ 15'$ (b) $\tan 27^\circ 13'$ مستخدماً صيغة الاستكمال الخلفية والأمامية لكريكوري - نيوتن .

لاحظ الرمز $x = a(h)b$ يقوم مقام x من a الى b بفترات h

2.19 احسب من الجدول التالي $f(3.8)$ لثلاثة أرقام معنوية مستخدماً طريقة صيغة الاستكمال التراجعي (أ) لكريكوري - نيوتن .

(ب) $f(1.2)$ لثلاثة أرقام معنوية مستخدماً صيغة الاستكمال الأمامية لكريكوري - نيوتن .

(ج) $f(5.12)$ لثلاثة ارقام معنوية مستخدما صيغة الاستكمال الأمامية
لكريكوري - نيوتن .

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1.00	1.50	2.20	3.10	4.60

اجوبة

2.20 اعطيت $\sin x$ لقيم $x = 5^\circ(5')30''$ احسب لخمس ارقام معنوية بطريقة الاستكمال
كلا من

(a) $\sin 5^\circ 14'$. (b) $\sin 25^\circ 25'$. (c) $\sin 17^\circ 30'$.

(b) 0.42917.

اجوبة

2.21 اعطيت x^3 لكل من $x = 1(1)5$ جد مكعبات كلا مما يأتي بطريقة الاستكمال

(a) 4.37. (b) 1.35. (c) 3.46.

اجوبة

(a) $(4.37)^3 = 83.45$ (backward). (c) $(3.46)^3 = 41.42$ (backward and forward).

2.22 اعطيت القيم المتساوية الأبعاد التالية : $y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}, y_{17}, y_{18}, y_{19}, y_{20}, y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{24}, y_{25}, y_{26}, y_{27}, y_{28}, y_{29}, y_{30}, y_{31}, y_{32}, y_{33}, y_{34}, y_{35}, y_{36}, y_{37}, y_{38}, y_{39}, y_{40}, y_{41}, y_{42}, y_{43}, y_{44}, y_{45}, y_{46}, y_{47}, y_{48}, y_{49}, y_{50}, y_{51}, y_{52}, y_{53}, y_{54}, y_{55}, y_{56}, y_{57}, y_{58}, y_{59}, y_{60}, y_{61}, y_{62}, y_{63}, y_{64}, y_{65}, y_{66}, y_{67}, y_{68}, y_{69}, y_{70}, y_{71}, y_{72}, y_{73}, y_{74}, y_{75}, y_{76}, y_{77}, y_{78}, y_{79}, y_{80}, y_{81}, y_{82}, y_{83}, y_{84}, y_{85}, y_{86}, y_{87}, y_{88}, y_{89}, y_{90}, y_{91}, y_{92}, y_{93}, y_{94}, y_{95}, y_{96}, y_{97}, y_{98}, y_{99}, y_{100}$

جد المفكوك التقريبي لكل من (أ) y_1'' (ب) y_2''' (ج) y_3^{iv} (د) y_4^{iv} مع اخطائها
من المرتبة h^2 بالطرق التالية :

(1) باستخدام مفكوك الفروق المركزية . عبر عن المشتقات بطريقتي الوسطة وغير
الوسطة .

(2) طريقة استكمال القطوع المكافئة المارة من نقاط منتظمة متناظرة الموقع
بالنسبة الى

(3) باستخدام مفكوك متسلسلة تيلر

جد حيث أمكن اول حد من متسلسلة الخطأ .

الجواب انظر شكل 2.8a

2.23 جد بصورة تقريبية مفكوك كل من المشتقات التالية بأخذ حدين من متسلسلة
مفكوك الفروق المركزية للمشتقات .

(أ) y_1' (ب) y_2'' (ج) y_3''' (د) y_4^{iv}

الجواب انظر شكل 2.8b

2.24 كَوّن جداول الفروق التراجعية والأمامية والمركزية للذوال التالية :

- (a) $\tan x; x = 1^\circ(1^\circ)6^\circ$. (b) $\cosh x; x = 0.1(0.1)0.7$.
(c) $e^x; x = 0(0.5)3.0$. (d) $J_0(x); x = 0(0.1)1.0$.
(e) $x^3 - 4x^2 + 5x + 3; x = 0(1)4$. (f) $\log \sin x; x = 5^\circ(5^\circ)25^\circ$.
(g) $e^{-x}; x = 0(0.5)3.0$. (h) $\tanh x; x = 0.1(0.1)0.7$.

2.25 عَيّن الخطأ من إحدى القيم الموزعة توزيعاً منتظماً المعطاة في الجدول التالي وصححها بطريقة الفروق المركزية .

(a)

x_i	0.50	0.52	0.54	0.56	0.58	0.60	0.62
y_i	0.5211	0.5438	0.5666	0.5987	0.6131	0.6367	0.6605

(b)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	0.01746	0.03492	0.05241	0.07154	0.08749	0.10510	0.12278	0.14054	0.15838

(c)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1.733	1.822	1.916	2.100	2.117	2.226	2.340	2.460

(d)

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
e^{-x}	1.000	0.905	0.819	0.741	0.640	0.607	0.549	0.497

Ans. (b) $y_4 = 0.06993$. (d) $e^{-0.4} = 0.670$.

الأجوبة

2.26 أعطيت قيم $\tan x$ للفترة التالية $x = 23^\circ(1^\circ)(28^\circ)$ استخدم صيغة استرلنك للاستكمال لحساب القيم التالية لخمسة أرقام معنوية

- (a) $\tan 23^\circ 15'$. (b) $\tan 27^\circ 13'$.

Ans. (a) $\tan 23^\circ 15' = 0.42963$.

2.27 أعطيت $\sin x$ لقيم x التالية $x = 5^\circ(5')30''$ استخدم صيغة استرلنك للاستكمال لحساب ما يأتي لخمس أرقام معنوية

(a) $\sin 5^\circ 14'$. (b) $\sin 25^\circ 25'$. (c) $\sin 17^\circ 30'$.

(b) $\sin 25^\circ 25' = 0.42920$.

2.28 استخدم طريقة استكمال لكرانج لحساب قيم الدوال المعرفة بالجدول التالية :

(a)

x	0	1.2	2.5	4.0	5.1	6.0	6.5	7.0
$f(x)$	3.00	6.84	14.25	27.00	39.21	51.00	58.25	66.00

$f(2.00); f(4.50); f(6.30)$.

(b)

x	0	1.4	2.5	3.8	5.4	6.0	6.7	7.0
$f(x)$	5.00	1.36	1.25	4.24	7.56	17.00	23.09	26.00

$f(2.00); f(3.00); f(6.40)$.

(a) $f(2.00) = 11.00; f(6.30) = 55.25$.

(b) $f(3.00) = 2.00$.

الأجوبة

2.29 جد مشتقات دالة بسل (Bessel) $J_0(x)$ عند النقاط المؤشرة أزاء كل منها مع الأخطاء المؤشرة أمام كل منها وذلك باستخدام الحد الأول من مفكوك متسلسلة الفروق التراجعية . الفروق الأمامية . الفروق المركزية .

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$J_0(x)$	1.0000	0.9975	0.9900	0.9776	0.9604

(a) $\left. \frac{dJ_0}{dx} \right|_{x=0.1}; e = 0(h^2)$.

(b) $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right|_{x=0.1}; e = 0(h)$.

(c) $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right|_{x=0.1}; e = 0(h^2)$.

(d) $\left. \frac{d^4J_0}{dx^4} \right|_{x=0.2}; e = 0(h^2)$.

(e) $\left. \frac{d^3J_0}{dx^3} \right|_{x=0}; e = 0(h)$.

(f) $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right|_{x=0.4}; e = 0(h)$.

(g) $\left. \frac{dJ_0}{dx} \right|_{x=0.4}; e = 0(h)$.

Ans. (a) -0.0500 . (c) -0.5000 . (e) 0.1000 . (g) -0.1720 .

الأجوبة

2.30 جد المشتقات التالية لدالة بسل $Y_1(x)$ عند النقاط المؤشرة أزاء كل منها مع اخطاءها المؤشرة وذلك باستخدام الحد الأول من مفكوكات فريدولفها التراجعية والأمامية والمركبة :

x	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4
$Y_1(x)$	0.1750	-0.1998	-0.2223	-0.2422	-0.2596

- (a) $\left. \frac{d^4 Y_1}{dx^4} \right|_{x=6.2}$; $e = 0(h^2)$. (b) $\left. \frac{d Y_1}{dx} \right|_{x=6.0}$; $e = 0(h)$.
(c) $\left. \frac{d^3 Y_1}{dx^3} \right|_{x=6.3}$; $e = 0(h)$. (d) $\left. \frac{d^2 Y_1}{dx^2} \right|_{x=6.3}$; $e = 0(h^2)$.
(e) $\left. \frac{d Y_1}{dx} \right|_{x=6.4}$; $e = 0(h)$.

Ans. (b) -0.2480. (d) 0.2500.

الأجوبة

2.31 جد تعبيراً مقرباً للمشتقات التالية عند النقاط المؤشرة أزاء كل منها استخدم صيغة النقاط الموزعة توزيعاً غير منتظم مستخدماً الجدول التالي

x	0.0	1.2	2.4	3.9
y	3.41	2.68	1.37	-1.48

- (a) $y' \Big|_{x=2.4}$; $e = 0(h)$. (b) $y' \Big|_{x=2.4}$; $e = 0(h^2)$.
(c) $y' \Big|_{x=1.2}$; $e = 0(h^2)$. (d) $y'' \Big|_{x=2.4}$; $e = 0(h)$.

(e) $y'' \Big|_{x=2.4}$; $e = 0(h^2)$.

Ans. (b) -1.451. (d) -0.5988.

الأجوبة

2.32 احسب المشتقات التالية عند النقاط المؤشرة أزاء كل منها مع الأخطاء ذات المراتب المبينة عندها وذلك باستخدام صيغة النقاط الموزعة توزيعاً غير منتظم .

x	0.0	0.1	0.2	0.4
$J_0(x)$	1.0000	0.9975	0.9900	0.9604

- (a) $\left. \frac{dJ_0}{dx} \right|_{x=0.2}$; $e = 0(h^2)$. (b) $\left. \frac{dJ_0}{dx} \right|_{x=0.2}$; $e = 0(h)$.
(c) $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right|_{x=0.2}$; $e = 0(h^2)$. (d) $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right|_{x=0.2}$; $e = 0(h)$.
(e) $\left. \frac{d^2J_0}{dx^2} \right|_{x=0.1}$; $e = 0(h^2)$.

Ans. (a) -0.0993. (c) -0.4900. (e) -0.5000.

الأجوبة

2.33 افرض ان متسلسلة الخطأ لمعادلة ما هي من المرتبة الرابعة h^4 وانه من الممكن الوقوف بعد الحد الثاني

$$e \doteq c_2 h^4 + c_3 h^6,$$

اشتق تعبيراً لمعاملات [الذي يدعى استيفاء (h^4, h^6)] واحسب قيم هذه المعاملات لتقيم h تتناسب تناسباً عكسياً مع

(a) 3, 2, 1; (b) 4, 3, 2; (c) 5, 4, 3.

$$Ans. K_{ijk} = \frac{n_k^6(n_j^2 - n_i^2)k_k - n_j^6(n_k^2 - n_i^2)k_i + n_i^6(n_k^2 - n_j^2)k_i}{n_k^6(n_j^2 - n_i^2) - n_j^6(n_k^2 - n_i^2) + n_i^6(n_k^2 - n_j^2)}.$$

الاجوبة

2.34 احسب المشتقة الثانية لـ $J_0(x)$ عند $x = 0.2$ (a), $x = 0.5$ (b) بطريقة الفروق

المركزة مع الخطأ من مرتبة h^2 مستخدماً جدول تمرين 2.24(d) عندما $h = 0.2$ $h = 0.1$ استوف وقارن مع النتائج التي استخدمت في صيغة الفروق المركزة مع خطأ مرتبته h^4 وكان فيها $h = 0.1$

2.35 (a) احسب المشتقة الثانية للدالة $\sin x$ عند $x = \pi/4$ بطريقة مفكوك الفروق

المركزة مع خطأ من مرتبة h^2 أولاً h^4 ثانياً خذ $h = \pi/4, \pi/8, \pi/16$ وقارن مع القيم الحقيقية لها .

(b) احسب المشتقة الأولى للدالة $\sin x$ عند $x = \pi/4$ مستخدماً الطريقة

اعلاه مع الاخطاء التي ذكرت اعلاه لكن خذ $\pi/16$ $h = \pi/8$

Ans. (a) $e = 0(h^2)$; $h = \pi/4$; $y'' = -0.67151$;
 $h = \pi/8$; $y'' = -0.69813$;
 $h = \pi/16$; $y'' = -0.70500$;
 $e = 0(h^4)$; $h = \pi/8$; $y'' = -0.70702$;
 $h = \pi/16$; $y'' = -0.70729$.

الاجوبة

(b) $e = 0(h^2)$; $h = \pi/4$; $y' = 0.63662$;
 $h = \pi/8$; $y' = 0.68908$;
 $h = \pi/16$; $y' = 0.70257$;
 $e = 0(h^4)$; $h = \pi/8$; $y' = 0.70656$;
 $h = \pi/16$; $y' = 0.70707$.

- 2.36 اشتق صيغة التكامل معادلة (2.11.5) باستخدام متسلسلة تيلر .
 2.37 اشتق صيغة السبع نقاط للتكامل مع خطأ من مرتبة h^6 بمتسلسلة تيلر قارنها مع المعادلة (2.11.6) صيغة ويدل Weddle .
 2.38 انجز التكاملات التالية مستخدماً قاعدة الشبه المنحرف مستعملاً قيم n المؤشرة ازاء كل منها ثم استوف .

(a) $\int_0^\pi \sin^3 x \, dx$ ($n = 2, 4, 6$).

(b) $\int_0^2 \sqrt{4x - x^2} \, dx$ ($n = 2, 4$).

(c) $\int_0^2 e^{-x^2} \, dx$ ($n = 2, 4$).

الاجوبة

Ans. (a) $n = 2$; 1.571; $n = 4$; 1.342; $n = 6$; 1.335; $n = 2, 4$; 1.266; $n = 4, 6$; 1.330; true = 1.333. (c) $n = 2$; 0.877; $n = 4$; 0.881; $n = 2, 4$; 0.8823; true = 0.8821.

- 2.39 انجز التكاملات التالية مستخدماً قاعدة سمبسون ذات الثلث لقيم n المؤشرة امامها ثم استوف .

(a) $\int_0^2 \sqrt{4x - x^2} \, dx$ ($n = 2, 4$).

(b) $\int_2^5 x \sqrt{3 + 4x} \, dx$ ($n = 2, 4$).

(c) $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx$ ($n = 2, 4$).

(d) $\int_1^3 x^2 \sinh x \, dx$ ($n = 2, 4$).

(e) $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ ($n = 2, 4, 6$).

(f) $\int_0^\pi \sin^3 x \, dx$ ($n = 2, 4, 6$).

(g) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{25 + x^2}}$ ($n = 2, 4$).

(h) $\int_0^4 \frac{dx}{(25 - x^2)^{3/2}}$ ($n = 2, 4$).

Ans. (b) $A_2 = 71.702$; (d) $A_2 = 49.796$;
 $A_4 = 71.691$; $A_4 = 48.464$;
 $A_{2,4} = 71.690$; $A_{2,4} = 48.375$;
 $A = 71.693$; $A = 48.371$.
(f) $A_2 = 2.094$; (h) $A_2 = 0.0577$;
 $A_4 = 1.268$; $A_4 = 0.0541$;
 $A_6 = 1.330$; $A_{2,4} = 0.0538$;
 $A_{2,6} = 1.3205$; $A = 0.05333$.
 $A = 1.333$.

الاجوبة

2.40 جد قيم التكاملات التالية مستخدماً قاعدة شبه المنحرف لـ $n = 4$ و $n = 2$ ثم استوف

(a) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$. (b) $\int_3^7 x^2 \log x \, dx$.
(c) $\int_1^{11} \sqrt{1+x^2} \, dx$. (d) $\int_0^{0.8} \cosh x^2 \, dx$.
(e) $\int_3^7 \log x \, dx$. (f) $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{16x-x^2}}$
(g) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ (h) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$
(i) $4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

الاجوبة

(b) $A_2 = 185.7090$; $A_4 = 179.5385$; $A_{2,4} = 177.4819$;
 $A = 177.4836$.
(d) $A_2 = 0.848$; $A_4 = 0.837$; $A_{2,4} = 0.834$.
(f) $A_2 = 0.5275$; $A_4 = 0.5244$; $A_{2,4} = 0.5234$; $A = 0.5236$.
(h) $A_2 = 0.9695$; $A_4 = 0.9389$; $A_{2,4} = 0.9286$; $A = 0.9267$.

موبة

2.41 جد قيم التكاملات التي جاءت في التمرين 2.40 مستخدماً طريقة سمبسون ذات $\frac{1}{3}$ واستوف لقيم $n = 2$ و $n = 4$ من الفترات الفرعية .

(b) $A_2 = 177.454$; $A_4 = 177.481$; $A_{2,4} = 177.483$.
(d) $A_2 = 0.835$; $A_4 = 0.834$; $A_{2,4} = 0.834$.
(f) $A_2 = 0.5238$; $A_4 = 0.5234$; $A_{2,4} = 0.5234$.
(h) $A_2 = 0.9372$; $A_4 = 0.9286$; $A_{2,4} = 0.9280$.
(i) $A_2 = 3.1333$; $A_4 = 3.1413$; $A_{2,4} = 3.1419$; $A = \pi$.

الاجوبة

() طريقة الاستفاد h^2 و h^4 تستخدم فقط عندما تكون متوالية القيم مطردة فقط .

2.42 جد قيم التكاملات التي وردت في تمرين 2.38 بطريقة سمبسون $\frac{3}{8}$ لقيم $n = 3, 6$ واستوفها عندما تكون $A = 3, 6$ نافذة

(a) $A_3 = 1.530$; $A_6 = 1.305$; $A = 1.333$.

(c) $A_3 = 0.8623$; $A_6 = 0.8820$; $A_{3,6} = 0.8886$; $A = 0.8821$. الاجوبة

2.43 جد قيم التكاملات التي وردت في تمرين 2.40 بطريقة سمبسون $\frac{3}{8}$ واستوفها لقيم $n = 3$ و $n = 6$ من الاجزاء .

الاجوبة

(b) $A_3 = 177.457$; $A_6 = 177.472$; $A_{3,6} = 177.477$; $A = 177.4836$.

(f) $A_3 = 0.5237$; $A_6 = 0.5236$; $A_{3,6} = 0.5236$; $A = 0.5236$.

2.44 جد قيم التكاملات التي وردت في تمرين 2.40 باستخدام المعادلة (2.11.5) عندما $n = 4$

(b) $A_4 = 177.485$. (f) $A_4 = 0.5236$.

الاجوبة

2.45 جد قيم التكاملات التي وردت في تمرين 2.38 تبعاً لقاعدة ويدل عندما $n = 6$ الاجوبة

(a) $I = 1.343$

2.46 جد قيم التكاملات من x_0 الى x_n للدوال المعرفة بالجدولين التاليين باستخدام المعادلة (2.12.1)

(a)

x	0	1.2	2.5	4.0	5.1	6.0	6.5	7.0
$f(x)$	3.00	6.84	14.25	27.00	39.21	51.00	58.25	66.00

(b)

x	0.00	0.20	0.38	0.50	0.75	0.90	1.00
$f(x)$	6.00	5.24	4.62	4.25	3.56	3.21	3.00

(b) $I = 4.34$.

الاجوبة

2.47 جد التكاملات من x_0 الى x_n للدوال التي وردت في تمرين 2.46(a) و (b) باستخدام المعادلة (2.12.2)

(b) $I = 4.23$

الاجوبة

الفصل الثالث

التكامل العددي لمسائل الشروط الابتدائية

The Numerical Integration of Initial Value Problems

3.1 المقدمة :

خذ بنظر الاعتبار المعادلة التفاضلية ذات المرتبة n

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.1.1)$$

والمحتوية على n من الشروط الابتدائية في نقطة اختيرت بصورة كيفية كنقطة الاصل

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3.1.2)$$

ان الحل العددي لهذه المعادلة يتكون من ايجاد قيم التكامل $y(x)$ عند نقاط منتظمة التوزيع بفواصل h ضمن فترة تحديد الدالة . وتحسب هذه القيم خطوة بخطوة ابتداء من نقطة الشرط الابتدائي التي تؤخذ عادة كنقطة الاصل كما هو مبين في المعادلة (3.1.2) .

ان ايجاد قيم y عند نقطة الارتكاز $x = x_i$ (عدداً صحيحاً) ينجز عادة بمعادلات المتوالية recurrence equations حالما تكون معروفة في عدد محدد من النقاط السابقة $x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}$.

ولغرض تطبيق هذه المعادلات يكون من الضروري ايجاد قيم $y(x)$ بصورة دقيقة في بضع النقاط الاولى (واحدة الى اربعة) ، ويتم هذا عادة باستخدام مفكوك متسلسلة تيلر (Taylor expansion) للدالة $y(x)$.

3.2 اطلاق الحل بمتسلسلة تيلر :

Starting the Solution by Taylor Series

يمكن ايجاد قيم المشتقات المتتالية من مرتبة $n, n+1, n+2, \dots$ للدالة y في نقطة الاصل بواسطة المعادلتين (3.1.1) و (3.1.2) :-

$$\begin{aligned}
y_0^{(n)} &= f(0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \\
y_0^{(n+1)} &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} \right]_{x=0} \\
y_0^{(n+2)} &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y''^2 + \frac{\partial f}{\partial y'} y''' + \dots \right]_{x=0}
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

وبواسطة هذه المشتقات تسمح لنا الحدود الاولى من متسلسلة تيلر حول نقطه الاصل

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{1!} x + \frac{y_0''}{2!} x^2 + \frac{y_0'''}{3!} x^3 + \dots \tag{3.2.2}$$

بايجاد قيمة y في بضع نقاط الارتكاز الاولى . على شرط ان تكون h صغيرة بما فيه الكفاية كي تكون المتسلسلة سريعة التقارب عند $x = ih$ ($i = 1, 2, \dots, 4$)

ليكن مثالنا معادلة الدرجة الاولى

$$y' = -\frac{0.9}{1+2x} y \tag{أ}$$

بالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0 = 1. \tag{ب}$$

ان القيم الابتدائية لمشتقات y المتتالية هي

$$\begin{aligned}
y'(0) &= -0.9[(1+2x)^{-1}y]_{x=0} = -0.9; \\
y''(0) &= -0.9[(1+2x)^{-1}y' - 2(1+2x)^{-2}y]_{x=0} \\
&= -0.9(y_0' - 2y_0) = +2.610; \\
y'''(0) &= -0.9[(1+2x)^{-1}y'' - 4(1+2x)^{-2}y' + 8(1+2x)^{-3}y]_{x=0} \\
&= -0.9(y_0'' - 4y_0' + 8y_0) = -12.79; \\
y^{iv}(0) &= -0.9[(1+2x)^{-1}y''' - 6(1+2x)^{-2}y'' + 24(1+2x)^{-3}y' \\
&\quad - 48(1+2x)^{-4}y]_{x=0} \\
&= -0.9(y_0''' - 6y_0'' + 24y_0' - 48y_0) = +88.24.
\end{aligned}$$

وبهذا تصبح الحدود الخمسة الأولى في مفكوك تيلر $y_T(x)$ للدالة $y(x)$ حول $x = 0$ على الصورة التالية :

$$y_T(x) = y_0 + \frac{y_0'}{1!}x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \frac{y_0'''}{3!}x^3 + \frac{y_0^{(4)}}{4!}x^4$$

$$= 1 - 0.9x + 1.305x^2 - 2.132x^3 + 3.677x^4.$$

الجدول 3.1 يبين قيم مفكوك تيلر $y_T(x)$ لقيم $x = 0, 0.02, 0.10$ وكذلك لقيم $x = 0.20, 0.30$ مع القيم المناظرة للدالة $y(x)$ والتي حصل عليها من تكامل المعادلة (a) بطريقة فصل المتغيرات .

$$\frac{dy}{y} = -0.9 \frac{dx}{1+2x},$$

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \ln \frac{y}{y_0} = -0.9 \int_0^x \frac{dx}{1+2x} = -0.45 \ln (1+2x).$$

$$y(x) = (1+2x)^{-0.45}.$$

وبلاحظ ان هناك خطأ قدره $+1.27$ في قيمة $y_T(0.3)$

x	$y_T(x)$	$y(x)$
0	1.0000	1.0000
0.02	0.9825	0.9825
0.04	0.9660	0.9660
0.06	0.9503	0.9503
0.08	0.9354	0.9354
0.10	0.9213	0.9212
0.20	0.8610	0.8595
0.30	0.8197	0.8094

جدول (٣-١)

وكمثال على الابتداء لمعادلة من المرتبة الثانية يؤخذ الرقاص الرياضي في الشكل 3.1 بنظر الاعتبار .

ان تذبذب رقاص رياضي . في الفراغ . يطلق من السكون عند $t = 0$ ومن زاوية θ_0 يفي بشروط المعادلة التفاضلية . اللاحقة . المعروفة .

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (ج)$$

(*) انظر . مثلاً . المعادلات التفاضلية . الفقرة 2.7

والشروط الابتدائية هي

$$\theta(0) = \theta_0; \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad (د)$$

حيث θ هي الزاوية بين الرقاص والاحداثي الشاقولي ، t الزمن ، g التعجيل الارضي ، L هي طول الرقاص .

يمكن الحصول على حل محكم rigorous solution لمعادلة الشرط الابتدائي (ج) و (د) بدلالة دوال غير ابتدائية تدعى تكاملات القطوع الناقصة elliptic Integrals. وتظهر ان فترة تذبذب الرقاص هي

$$T = 4K\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (هـ)$$

حيث K هي تكامل القطع الناقص ، التام من الصنف الاول وهي مصنفة في جداول كتاب بيرس Peirce ، على سبيل المثال ، جدول قصير للتكاملات .

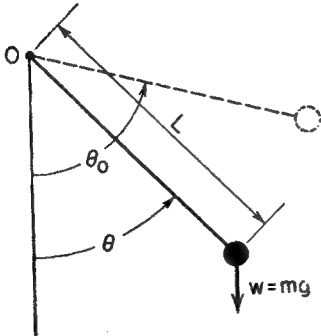
وعندما تكون $K(\theta_0/2) = 2.1565, \theta_0 = 120^\circ$ وباعتبار $g = 32.2$ قدم/ ثانية² و

$$T = 3.22 \text{ ثا} \quad \text{قد تكون فترة تذبذب الرقاص } T = 2.7276 \text{ ثا}$$

ولحل نفس المسألة بالطرق العددية تحول المعادلة الى صيغة لابعدية وذلك بجعل

$$t = \frac{T}{4} \tau; \quad \therefore \quad dt = \frac{T}{4} d\tau;$$

$$(dt)^2 = \left(\frac{T}{4}\right)^2 (d\tau)^2 = (0.6819)^2 (d\tau)^2 = 0.46499 d\tau^2.$$



شكل (٣-١)

ولكون $10^{-1} = g/L$ ثانية تصبح المعادلة (ج) بعد التعويض عن المتغيرات بصيغتها اللابعدية التالية :

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} \equiv \ddot{\theta} = -4.6499 \sin \theta, \quad (و)$$

بينما تتطلب الشروط الابتدائية كون

$$\theta(0) = \theta_0 = 120^\circ = 2.0944 \text{ radians}; \quad (ز)$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = 0,$$

حيث تعني النقاط المفاضلة بالنسبة الى τ . ومن المعادلة (و) ومشتقاتها نحصل على

$$\ddot{\theta}_0 = -4.6499 \sin \theta_0 = -4.0268;$$

$$\ddot{\theta}_0 = -4.6499 \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0 = 0;$$

$$\theta_0''' = -4.6499(\cos \theta_0 \cdot \ddot{\theta}_0 - \sin \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0^2) = -9.3623,$$

ومن ثم تكون متسلسلة تيلر :

$$\theta(\tau) \doteq 2.0944 - 2.0134\tau^2 - 0.3901\tau^4. \quad (ط)$$

الجدول 3.2 يدرج قيم θ المستخرجة من هذه المتسلسلة لقيم $0(0.1)0.4 = \tau$

$\tau = t/0.6819$	θ	θ_L
0	2.0944	2.0944
0.1	2.0742	2.0458
0.2	2.0132	1.9026
0.3	1.9100	1.6713
0.4	1.7623	1.3624

جدول (٣-٢)

ان المعادلة الخطية . النافذة لقيم الزاوية θ الصغيرة بحيث يكون $\sin \theta \approx \theta$ هي

$$\ddot{\theta} = -4.6499\theta$$

وتعطي الحل :

$$\theta_L(\tau) = 2.0944 \cos 2.1564\tau \quad (ى)$$

ان قيم θ_L معطاة على سبيل المقارنة في العمود الثالث من الجدول 3.2

ان حل المسألة نفسها عندما يتذبذب الرقاص في محيط لزوج . والذي لا يمكن الوصول اليه بتكاملات القطوع الناقصة elliptic integrals لا ينطوي على مزيد من الصعوبات حين تستعمل متسلسلة تيلر .

ان المعادلة التفاضلية لرقاص يتذبذب في محيط لزوج تحتوي على حد تخامدي (damping term) اضافي $\mu d\theta/dt$ حيث μ هي مقاومة الاحتكاك لكل وحدة كتلة . فاذا كانت $\mu = 0.5875 \text{ sec}^{-1}$ على سبيل المثال و $g/L = 10 \text{ sec}^{-2}$ كما في السابق . تتحول المعادلة (ج) الى المعادلة :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0.5875 \frac{d\theta}{dt} + 10 \sin \theta = 0. \quad (\text{ط})$$

فاذا ما جعلنا $t = (T/4)\tau = 0.6819\tau$ ثانية

(حيث T هي فترة تذبذب الرقاص غير المتخامد تأخذ المعادلة (ط) الصيغة التالية :

$$\ddot{\theta} + 0.4\dot{\theta} + 4.6499 \sin \theta = 0 \quad (\text{ك})$$

بينما تبقى الشروط الابتدائية كما في المعادلات (ز) وباستعمال المعادلة (ك) ومشتقاتها المتتالية

$$\dot{\theta}_0 = -0.4\theta_0 - 4.6499 \sin \theta_0 = -4.0268;$$

$$\ddot{\theta}_0 = -0.4\ddot{\theta}_0 - 4.6499 \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0 = 1.6107;$$

$$\theta_0^{iv} = -0.4\ddot{\theta}_0 - 4.6499 \cos \theta_0 \cdot \ddot{\theta}_0 + 4.6499 \sin \theta_0 \cdot \dot{\theta}_0^2 = -10.006,$$

يتم الحصول على حل متسلسلة تيلر كما في السابق

$$\theta(\tau) = 2.0944 - 2.0134\tau^2 + 0.2685\tau^3 - 0.4169\tau^4, \quad \dots (\text{ل})$$

والتي يظهر حلها في الجدول 3.3 لقيم τ لقيم $0(0.1)0.4 = \tau$

τ	θ	θ_L	θ
0	2.0944	2.0944	0
0.1	2.0745	2.0465	-0.3963
0.2	2.0153	1.9076	-0.7865
0.3	1.9171	1.6875	-1.1806
0.4	1.7788	1.3994	-1.5886

جدول 3.3

ان حل المعادلة الخطية المناظرة لها

$$\ddot{\theta} + 0.4\dot{\theta} + 4.6499\theta = 0 \quad (ن)$$

(الجدور المميزة ينقضها characteristic roots 0.2 ± 2.1471 هو :

$$\theta_L(\tau) = e^{-0.2\tau}(2.0944 \cos 2.1471\tau + 0.1951 \sin 2.1471\tau) \quad (س)$$

ويظهر في العمود الثالث من الجدول 3.3

ويحوي العمود الرابع من الجدول على قيم θ التي ستستعمل في جزء لاحق والتي حصل عليها بمفاضلة المعادلة (ل) :

$$\theta = -4.0268\tau + 0.8054\tau^2 - 1.6677\tau^3,$$

ان الطرق التي استعملت في هذا الجزء على معادلات تفاضلية من درجات واطئة يمكن توسيعها الى معادلات من اي درجة وهي ذات قيمة عملية في تعيين الحل في جوار neighborhood نقطة الاصل (أو نقطة الشرط الابتدائي) وازدياد المسافة من نقطة الاصل تقل دقة حل متسلسلة تيلر وتعين استعمال عدد أكبر من حدود متسلسلة تيلر للحصول على دقة محددة .

وحيث ان هذا قد يكون بالغ الارهاق ، يغدو اكثر عمليا ان يتم تمديد (prolong) الحل بطرق اخرى بعضها موضح في الفقرات التالية :

3.3 طرق أويلر للتكاملات الامامية :

Euler Forward Integration Methods

هناك طريقة ابتدائية لتكامل معادلات الدرجة الاولى خطوة بخطوة . تعود الى اويلر . لها فائدة محدودة بسبب دقتها الواطئة غير انها مفيدة في توضيح عمليات التكاملات الامامية وهي لا تحتاج الى اطلاق الحل .
لنأخذ مسألة الشرط الابتدائي

$$y' = f(x,y); \quad y(0) = y_0, \quad (3.3.1)$$

يمكن حساب التغير Δy_i لكل خطوة بالمعادلة :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_i, y_i)h. \quad (3.3.2)$$

وبوضح الجدول 3.4 تطبيق المعادلة (3.3.2) لمسألة المعادلتين (أ) و(ب) من الفقرة 3.2 .

x	y_i	f_i	Δy_i
0	1.0000	-0.9000	-0.0180
0.02	0.9820	-0.8498	-0.0170
0.04	0.9650	-0.8042	-0.0161
0.06	0.9489	-0.7625	-0.0153
0.08	0.9336	-0.7243	-0.0145
0.10	0.9191	-0.6893	-0.0689
0.20	0.8402	-0.5401	-0.0540
0.30	0.7862		

جدول (3-4)

ان قيمة y عند $x = 0.10$ فيها خطأ مقداره 0.24 بالمائة . وتلك عند $x = 0.3$ فيها خطأ مقداره 2.86 بالمائة .

ان الخطأ في طريقة اويلر هو من مرتبة h^2 حيث ان الطريقة تستعمل الحد الاول فقط من الطرف الايمن للمعادلة (2.11.1). ويمكن تحسين دقة طريقة أويلر باستعمال المعادلة (3.3.2) لحساب y_{i+1} اولاً ، ثم y'_{i+1} من المعادلة (3.3.1) ومن ثم يتم حساب $\Delta' y_i$ مصححة باستعمال متوسط y'_i و y'_{i+1} في المعادلة (3.3.2) أي بقانون الشبه المنحرف . وعليه يكون :

$$\Delta' y_i = \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \quad (3.3.3)$$

وفي هذه الحالة تسمى المعادلة (3.3.2) بالمتنبىء والمعادلة (3.3.3) بالمصحح لطريقة أولر المحورة . ان الخطأ في هذه الطريقة هو من مرتبة h^3 حيث انها تستند على المعادلة (2.11.3) لقانون الشبه المنحرف .

الجدول (3.5) يبين تطبيق هذه الطريقة على مسألة الجدول (3.4) نفسها .

جدول (3-5)

x_i	y_i	f_i	Δy_i	y_{i+1}	f_{i+1}	$\Delta' y_i$	$\frac{-0.9}{1+2x}$
0	1.0000	-0.90000	-0.0180	0.9820	-0.8498	-0.0175	-0.9000
0.02	0.9825	-0.8503	-0.0170	0.9655	-0.8046	-0.0165	-0.8654
0.04	0.9660	-0.8050	-0.0161	0.9499	-0.7633	-0.0157	-0.8333
0.06	0.9503	-0.7637	-0.0153	0.9350	-0.7255	-0.0149	-0.8036
0.08	0.9354	-0.7258	-0.0145	0.9209	-0.6907	-0.0142	-0.7759
0.10	0.9212	-0.6909	-0.0691	0.8521	-0.5478	-0.0619	-0.7500
0.20	0.8593	-0.5524	-0.0552	0.8041	-0.4523	-0.0502	-0.6429
0.30	0.8091						-0.5625

وهنا يصبح الخطأ عند $x=0.10$ صفراً وذلك عند $x=0.3$ مقداره 0.04 بالمائة فقط .

3.4 طريقة ملني Milne's Method

ان طريقة ملني . والتي تعتمد المتنبىء - المصحح لمعادلات الدرجة الاولى . ذات خطأ من مرتبة h^5 وتتطلب معرفة قيم y و y' في نقاط الارتكاز الاربعة الاولى لغرض الانطلاق .
لنأخذ المعادلة مع قيم الارتكاز المطلوبة

$$y' = f(x,y); \quad y_0, y_1, y_2, y_3; \quad f_0, f_1, f_2, f_3, \quad (3.4.1)$$

وتحويل المعادلة (2.10.3) ، خطوة واحدة الى اليسار نحصل على :

$$B_4 = y_{i+1} - y_{i-3} = \int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} f(x,y) dx = \frac{4h}{3} (2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i) + \frac{14}{15} h^5 f^{(iv)}(\xi), \quad (a)$$

بحسب المتنبىء في طريقة ملني

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3} (2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i), \quad (3.4.2)$$

والتي بواسطتها يتم حساب f_{i+1} من المعادلة (3.4.1) ثم تحسب قيمة y_{i+1} المصححة باستعمال قانون سمبسون التلثي :

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}), \quad (3.4.3)$$

حيث الخطأ فيها $-\frac{h^5}{90} f^{iv}(\xi)$

والجدول 3.6 يعطينا التكامل من $0 = x$ الى $2.4 = x$ للمعادلة

$$y' = x + y; \quad y_0 = 0 \quad (ب)$$

والتي حسب قيمها الثلاثة الاولى بمسلسلة تيلر وبفترة $h = 0.3$ تظهر القيمة الصحيحة للدالة $y = e^x - (1 + x)$ في العمود الرابع .

جدول (٣-٦)

x_i	$y_{i,p}$	$f_{i,p}$	$y_{i,c}$	$f_{i,c}$	y_i
0				0.000	0.000
0.3				0.350	0.050
0.6				0.822	0.222
0.9				1.460	0.560
1.2	1.119	2.319	1.119	2.319	1.119
1.5	1.979	3.479	1.982	3.482	1.981
1.8	3.248	5.048	3.249	5.049	3.249
2.1	5.062	7.162	5.066	7.166	5.066
2.4	7.618	10.018	7.622		7.623

3.5 طريقة آدامز Adams's Method

ان مواصلة الحل الذي بوشربه بمتسلسلة تيلر يمكن ان يتم بواسطة معادلة ادامز المتواترة التي تعتمد على الفروق الخلفية (التراجعية) .

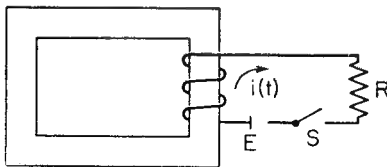
وللحصول على معادلة آدامز هذه . يتم التعويض عن المشتقات في مفكوك متسلسلة تيلر للمعادلة (2.11.1) بما يقابلها من الفروق الخلفية (التراجعية) الواردة في المعادلتين (2.4.16) , (2.4.17)

$$\begin{aligned}
y_{i+1} = y_i + h[& f_i + \frac{1}{2}(\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{4}\nabla^4 + \frac{1}{5}\nabla^5 + \dots)f_i \\
& + \frac{1}{6}(\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{1}{2}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \dots)f_i \\
& + \frac{1}{24}(\nabla^3 + \frac{3}{2}\nabla^4 + \frac{7}{4}\nabla^5 + \dots)f_i + \frac{1}{120}(\nabla^4 + 2\nabla^5 + \dots)f_i \\
& + \frac{1}{720}(\nabla^5 + \dots)f_i + \dots]
\end{aligned}$$

$$y_{i+1} = y_i + h[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \frac{25}{720}\nabla^4 + \frac{95}{288}\nabla^5 + \dots]f_i. \quad (3.5.1) \text{ أو}$$

ان عدد الحدود التي تؤخذ بنظر الاعتبار في متسلسلة المعادلة (3.5.1) يعتمد على عدد قيم نقاط الارتكاز المحسوبة بمتسلسلة تيلر وعلى الدقة المتباعدة في الحل.

ولتوضيح استعمال معادلة آدامز تؤخذ الدائرة الكهربائية في الشكل 3.2



شكل 3.2

تحتوي الدائرة على ملف (coil) مع لب حديدي (core) ذي منحنى مغناطيسي معادلته :

$$Ni = 0.6\phi + 0.0033 \times 10^{10}\phi^3,$$

حيث تمثل ϕ التدفق (flux) في اللب (بالكيلوخط) . N عدد اللفات في الملف و i التيار (بالأمبير) الذي يسبب التدفق وعند تطبيق قانون كيرشهوف للجهد على الدائرة نحصل على

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} = Ri + N \frac{d\phi}{dt}$$

ووحدة التدفق هنا هي الويبر (webers) . (أي 10^8 كيلوخط) . و t بالثواني ولدى التعويض من المعادلة (أ) نحصل على

$$E = \frac{R}{N} (0.6\phi + 0.0033\phi^3) + N \frac{d\phi}{dt} \cdot 10^{-5}, \quad * *$$

حيث وحدات ϕ هنا هي كيلو خط ، ويجعل الجهد $E = 18$ فولت ، $N = 100$
 $R = 300$ أوم و t ملي ثانية يكون التدفق منظما بالمعادلة اللاخطية التالية

$$\frac{d\phi}{dt} + 1.8\phi + 0.01\phi^3 = 18. \quad (ب)$$

فاذا ماكان المفتاح (د) قد اغلق عند $t = 0$ ، تتطلب الشروط الابتدائية كون ان التدفق ϕ
يتقارب تلامسيا approaches asymptotically من قيمته العظمى ϕ_m بازدياد t ،
ولذا فان ϕ_m تحدد كون $d\phi/dt = 0$ وحسب المعادلة (ب) فانها جذر للمعادلة التالية :

$$0.01\phi^3 + 1.8\phi - 18 = 0.$$

ان الجذر الحقيقي الوحيد لهذه المعادلة يساوي 7.5802 ولذا فان $\phi_m = 7.5802$

لاختزال المعادلة (ب) الى صيغة لابعدية نجعل :

$$\phi(t) = \phi_m y(t), \quad (د)$$

ونقتني المعادلة للدالة الابعدية $y(t)$

$$\phi_m \dot{y} = 18 - 1.8\phi_m y - 0.01\phi_m^3 y^3,$$

حيث تعني \dot{y} المشتقة dy/dt وتعويض قيمة $\phi_m = 7.5802$ تصبح المعادلة أخيرا

$$\dot{y} = 2.3746 - 1.8y - 0.5746y^3, \quad (هـ)$$

بينما يتطلب الشرط الابتدائي ان يكون :

$$y(0) = 0. \quad (و)$$

ولاطلاق حل معادلة الشرط الابتدائي (هـ) ، (و) نفاضل المعادلة (هـ) تفاضلا متتاليا

للحصول على

$$\dot{y}_0 = 2.3746;$$

$$\ddot{y}_0 = -1.8\dot{y}_0 - 0.5746 \cdot 3y_0^2\dot{y}_0 = -4.2743;$$

$$\ddot{\dot{y}}_0 = (-1.8 - 0.5746 \cdot 3y_0^2)\dot{y}_0 - 0.5746 \cdot 6y_0\dot{y}_0^2 = 7.6937;$$

$$y_0^{(4)} = (-1.8 - 0.5746 \cdot 3y_0^2)\ddot{y}_0 - 0.5746 \cdot 6(3y_0\dot{y}_0 + \dot{y}_0^2)\dot{y}_0 = -60.011;$$

$$y_0^{(6)} = (-1.8 - 0.5746 \cdot 3y_0^2)y_0^{(4)} - 0.5746 \cdot 6(4y_0\dot{y}_0\ddot{y}_0 + 3y_0\dot{y}_0^2 + 6\dot{y}_0^3\ddot{y}_0) \\ = 606.58.$$

وردت المقاومة على انها 3000 أوم خطأ في الأصل الانكليزي وبدلت الى 300 هنا لكي تتسجم مع المعادلة (ب)

وبالقيم اعلاه للمشتقات عند $\dot{x}=0$ تصبح متسلسلة تيلر للدالة $y(t)$:

$$y(t) = 2.3746t - 2.1372t^2 + 1.2823t^3 - 2.5005t^4 + 5.0548t^5$$

وتعطى القيم في الجدول 3.7 لقيم $t = 0(0.05)0.20$ وكذلك $t = 0.30$. يحتوي العمود الثالث من الجدول على القيم التقريبية $y_L(t)$ للدالة $y(t)$ الناتجة عن جعل المعادلة (هـ) خطية . أي باهمال الحد التكعيبي $-0.5746y^3$. ويختصر الحل في هذه الحالة الى

$$y_L(t) = 1.3192(1 - e^{-1.8t}). \quad (ج)$$

وبعد الحصول على القيم في الجدول 3.7 تستعمل صيغة أدامز لتمديد الحل .

ان الاسطر الاربعة الاولى من الجدول (3.8) تحتوي على : (أ) قيم y . y^3 عند قيم $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ والتي أخذت من الجدول (3.7) . (ب) قيم $f(x=y)$ المعطاة بالمعادلة (هـ) للنقاط نفسها و (ج) قيم الفروق الخلفية الثلاثة الاولى للدالة $\dot{y} =$

جدول (3-7)

t	$y(t)$	$y_L(t)$
0	0	0
0.05	0.1135	0.1136
0.10	0.2172	0.2173
0.15	0.3116	0.3121
0.20	0.3973	0.3988
0.30	0.5476	0.5505

جدول (3-8)

i	t	y_i	y_i^3	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	y_L
0	0	0	0	2.3746				0
1	0.1	0.2172	0.0103	1.9777	-0.3969			0.2173
2	0.2	0.3973	0.0627	1.6234	-0.3543	0.0426		0.3988
3	0.3	0.5476	0.1642	1.2946	-0.3288	0.0255	-0.0171	0.5505
4	0.4	0.6610	0.2888	1.0189	-0.2757	0.0531	0.0276	0.6770
5	0.5	0.7523	0.4258	0.7758	-0.2431	0.0326	-0.0205	0.7828
6	0.6	0.8183	0.5479	0.5868	-0.1890	0.0541	0.0215	0.8712
7	0.7	0.8706	0.6598	0.4284	-0.1584	0.0306	-0.0235	0.9449
8	0.8	0.9059	0.7435	0.3168	-0.1116	0.0468	0.0162	1.0067
9	0.9	0.9346	0.8164	0.2232	-0.0936	0.0180	-0.0288	1.0581
10	1.0	0.9519						1.1011
	∞	1.0000						1.3192

(*) يلاحظ ان المعادلة التفاضلية في المسألة الحالية تأخذ الصيغة $\dot{y} = f(y)$ وذلك لعدم ظهور المتغير المستقل في الدالة f .

ان صيغة آدامز . المقطوعة بعد حدها الرابع ، ولفترة $h = 1$ تأخذ الشكل التالي :

$$y_{i+1} = y_i + 0.1[f_i + \frac{1}{2}f'_i + \frac{1}{12}f''_i + \frac{1}{24}f'''_i], \quad (h)$$

وتسمح بتعيين قيم y_4 عند $t = 0.4$ بدلالة f, y وفروقها عند $t = 0.3$ وحالما يتم حساب y_4 . تحسب قيمة f_4 بالمعادلة (هـ) ثم تحسب فروقها الخلفية (التراجعية) بمساعدة الجدول (3.8) ثم تستعمل المعادلة (ح) لحساب y_5 وهلم جرا . ان قيم المرتكزات لحد y_{10} والتي حصل عليها خطوة بخطوة ، مدونة في الجدول 3.8.

ان العمود المعنون y_L من الجدول (3.8) يحتوي (لغرض المقارنة) على حل الصيغة الخطية للمسألة نفسها محسوبا من المعادلة (ز).

ان الحل المحكم rigorous للمعادلات (هـ) : (و) قد نحصل عليه بطريقة فصل المتغيرات والتي تعطي t بدلالة y بالشكل التالي :

$$t = 0.2838 \left[-\ln(1 - y) + \frac{1}{2} \ln \frac{y^2 + y + 4.1326}{4.1326} + 0.7613 \left(\tan^{-1} \frac{2y + 1}{3.9409} - \tan^{-1} 0.2537 \right) \right] \quad \text{ط}$$

وبواسطة هذا الحل نجد انه عندما تكون $y = 0.7523$ تكون قيمة t هي 0.5040 عوضا عن 0.5 كما هو مبين في الجدول 3.8 وكذلك فلقيمة $y = 0.9519$ تساوي 0.9974 عوضا عن 1.0000

وبالعكس فان الاستكمال من الجدول (3.8) بمعادلة كريكوري - نيوتن للاستكمال الامامي المعادلة (2.6.1) يعطينا القيم المدونة في الجدول (3.9) والتي تعني y فيه قيم y المستكملة . وتعني y القيم الصحيحة كما تعني ϵ النسبة المئوية للخطأ .

جدول 3.9

t	0.5040	0.9974
y_i	0.7552	0.9513
y	0.7523	0.9519
$\epsilon(\%)$	0.38	0.06

ان هذه القيم لاتبين الاختلافات الصغيرة جدا بين القيم الصحيحة وتلك المستوفاة extrapolated بعد عشر خطوات من الحل فحسب ، وانما تبين ايضا انه في كثير من الحالات يكون حل المعادلة التفاضلية بالطرق العددية اكثر اقتصادا حتى ولو توفر الحل المحكم ، ففي المثال الحالي تكون متابعة الحل كما في الجدول (3.8) أبسط بالتأكيد من اشتقاق الحل المحكم (ط) ، اولا ومن ثم ايجاد قيمه العددية ، ان ايجاد قيم المعادلة (ط) مرهق اضافة الى كونه لايعطي قيم الارتكار للمتغير

3.6 طريقة (أويلر - فوكس للمعادلات الخطية)

The Euler-Fox Method for Linear Equations

ان هناك طريقة بسيطة وكفوة للتكامل خطوة فخطوة ، تعود الى فوكس وتعتمد على طريقة اويلر التقليدية ، تسمح بتكامل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى دون الحاجة الى اطلاق الحل بواسطة متسلسلة تيلر :
اعتبر معادلة اويلر المعدلة (3.3.3) :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [y'_i + y'_{i+1}] + \epsilon_{i+1}, \quad (3.6.1)$$

where

$$\epsilon_{i+1} = -(\frac{1}{12}h^3 y_i''' + \frac{1}{24}h^4 y_i^{iv} + \frac{1}{80}h^5 y_i^{v} + \dots). \quad (a)$$

ان الخطأ ϵ_{i+1} في المعادلة ^٢ يمكن التعبير عنه بدلالة الفروق المركزية غير المعدلة

(unaveraged) بالصيغة

$$\epsilon_{i+1}^{(n)} = -(\frac{1}{12}\delta^3 - \frac{1}{240}\delta^5 + \frac{1}{840}\delta^7 - \dots)y_{i+\frac{1}{2}}^{(n)} \quad (3.6.2)$$

وهو تصحيح فوكس معادلة اويلر المعدلة

لهذا الغرض لاحظ ان الفروق المركزية غير المعدلة من الدرجة الفردية $i + \frac{1}{2} 2n + 1$ قد تكتب أيضا كالفروق الامامي للفروق المركزية من الدرجة $2n$ عند i لأن :

$$\delta^{2n+1}y_{i+\frac{1}{2}} = \Delta(\delta^{2n}y_i). \quad (ب)$$

وكمثال

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = \delta(\delta^2 y_{i+\frac{1}{2}}) = \delta^2 y_{i+1} - \delta^2 y_i = \Delta(\delta^2 y_i).$$

بواسطة التعابير الرمزية للفروق الامامية والمركزية غير المعدلة (unaveraged) المعادلات

$$(2.7.11), (2.5.2)$$

$$\Delta = (e^{hD} - 1); \quad \delta^{2n} = 2^{2n} \sinh^{2n} (hD/2),$$

في هذا القسم وما يليه سيستعمل الرمز $y_i^{(n)}$ للدلالة على التقريب من المرتبة n لقيمة y عند النقطة.

يصبح الطرف الايسر من المعادلة (ب)

$$\delta^{2n+1}y_{i+1/2} = 2^{2n}(e^{hD} - 1) \sinh^{2n}(hD/2)y_i.$$

وتعويض هذه التعابير في المعادلة (3.6.2) يختزلها الى المعادلة (أ) فمثلا

$$\begin{aligned}\delta^3 y_{i+1/2} &= \left[2^2(e^{hD} - 1) \sinh^2\left(\frac{hD}{2}\right) \right] y_i \\ &= 2^2 \left[hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} + \dots \right] \left[\frac{h^2 D^2}{4} + \frac{h^4 D^4}{48} + \dots \right] y_i \\ &= \left[h^3 D^3 + \frac{h^4 D^4}{2} + \frac{h^5 D^5}{4} + \dots \right] y_i; \\ \delta^5 y_{i+1/2} &= \left[h^5 D^5 + \frac{h^6 D^6}{2} + \dots \right] y_i,\end{aligned}$$

وبذلك تعطينا المعادلة (3.6.2)

$$\begin{aligned}\epsilon_{i+1} &= - \left[\frac{1}{12} \left(h^3 D^3 + \frac{h^4 D^4}{2} + \frac{h^5 D^5}{4} + \dots \right) - \frac{1}{120} (h^4 D^5 + \dots) + \dots \right] y_i \\ &= - \left(\frac{1}{12} h^3 D^3 + \frac{1}{24} h^4 D^4 + \frac{1}{80} h^5 D^5 + \dots \right) y_i,\end{aligned}$$

والتي هي مطابقة للمعادلة (أ)

وستستعمل معادلة اويلر المعدلة مع تصحيح فوكس للحصول على قاعدة المواترة (recurrence formula) لحل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الاولى. لتأخذ المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى

$$y' = f(x)y + g(x) \quad (3.6.3)$$

وبالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0, \quad (3.6.4)$$

نجعل

$$\begin{aligned}x &= ih; & f(x) &= f_i; & f(x+h) &= f_{i+1}; \\ g(x) &= g_i; & g(x+h) &= g_{i+1}.\end{aligned}$$

ان تعويض المعادلة (3.6.3) في المعادلة (3.6.1) يعطي

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f_i y_i + g_i + f_{i+1} y_{i+1} + g_{i+1}) + \epsilon_{i+1},$$

ولدى حل المعادلة اعلاه لقيمة y_{i+1} نحصل على معادلة اويلر-فوكس المتواترة.

$$y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} f_{i+1}} \left[\left(1 + \frac{h}{2} f_i \right) y_i^{(n)} + \frac{h}{2} (g_i + g_{i+1}) + \epsilon_{i+1}^{(n-1)} \right], \quad (3.6.5)$$

حيث الخطأ $\epsilon_{i+1}^{(n-1)}$ والمعطى بالمعادلة (3.6.2) هو من مرتبة h^3 .

وستطبق معادلة اويلر-فوكس المتواترة لحل المسألة (a), (b) في القسم 3.2 والتي تنظم بالمعادلة .

$$y' = -\frac{0.9}{1+2z} y \quad (c)$$

والشرط الابتدائي

$$y(0) = 1. \quad (d)$$

باستعمال $h = 0.1$ لهذه الحالة

$$y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1 - 0.05f_{i+1}} [(1 + 0.05f_i)y_i^{(n)} + \epsilon_{i+1}^{(n-1)}]. \quad (e)$$

ان قيم $y_i^{(1)}$ في العمود الثالث من الجدول 3.10 حست بواسطة المعادلة (هـ) انطلاقاً من $y_0 = 1$ وباهمال التصحيح ϵ_{i+1} . ان قيمة $y(0.3)$ فيها خطأ مقداره 0.16 بالمائة.

ان الاعمدة المتتالية في الجدول 3.10 تحتوي على الفروق المركزية غير المعدلة (unaveraged) لـ $y_{i+1/2}$ التصحيح $\epsilon_{i+1}^{(1)}$ والقيمة التقريبية الثانية $y_i^{(2)}$ للمتغير y محسوبة بالمعادلة (هـ) مع التصحيح. وحيث ان قيمة $\delta^3 y_{i+1/2}$ يمكن حسابها للنقطة $z = 0.15$ فقط. فقد افترض ان الفرق الثالث ثابت وقيمته تساوي -0.0056 في جميع النقاط $i + \frac{1}{2}$ ومن ثم فان :

$$\epsilon_{i+1}^{(1)} \doteq -\frac{1}{12} \delta^3 y_{i+1/2} = -\frac{1}{12} \cdot 0.0056 = 0.0005,$$

مهما كانت i . وكذلك

$$y_i^{(2)} = y_i^{(1)} + \frac{0.0005}{1 - 0.05f_{i+1}}.$$

ان القيمة الاخيرة $y^{(2)}(0.3)$ فيها خطأ قدرة 0.02 بالمائة فقط .

جدول (١٠-٣)

z	f_i	$y_i^{(1)}$	$\delta y_{i+1/2}$	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_{i+1/2}$	$\frac{\epsilon_{i+1}^{(1)}}{1 - 0.05f_{i+1}}$	$y_i^{(2)}$
0	-0.9000	1.0000					1.0000
0.1	-0.7500	0.9205	-0.0795	0.0174	(-0.0056)	+0.0005	0.9210
0.2	-0.6428	0.8584	-0.0621	0.0118	-0.0056	+0.0005	0.8594
0.3	-0.5625	0.8081	-0.0503		(-0.0056)	+0.0005	0.8096

3.7 حل المعادلات الآتية من المرتبة الاولى:

The Solution of Simultaneous First-order Equations

ان معادلة آدامز (3.5.1) قد تستعمل ليسر لحل منظومة معادلات آتية من الدرجة الاولى . لنأخذ الحالة البسيطة لمعادلتين آتيتين :

$$y' = f(x, y, z); \quad z' = \phi(x, y, z), \quad (3.7.1)$$

حيث أن y, z هما بدلالة نفس المتغير المستقل x وبالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0; \quad z(0) = z_0. \quad (3.7.2)$$

وتطبيق صيغة آدامز على المعادلتين . نحصل على معادلتين التواتر

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{12}\nabla^2 + \dots]f_i; \\ z_{i+1} &= z_i + h[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{12}\nabla^2 + \dots]\phi_i, \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

التي يسكن استعمالها حانما يتم الحصول على قيم ابتدائية كافية بمتسلسلة تيلر . كمثل نأخذ الحالة المبسطة للمعادلتين الآتيتين :

$$y' = f(x, y, z) = z; \quad z' = \phi(x, y, z) = y \quad (a)$$

بالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0 = 1; \quad z(0) = z_0 = 2 \quad (b)$$

التي تعطين بالتفاضل

$$\begin{aligned} y_0 &= 1; & z_0 &= 2, \\ y'_0 &= z_0 = 2; & z'_0 &= y_0 = 1, \\ y''_0 &= z'_0 = 1; & z''_0 &= y'_0 = 2, \\ & \dots & & \end{aligned}$$

وبذلك تكون متسلسلة تيلر .

$$y = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \dots; \quad z = 2 + x + x^2 + \dots$$

ومن هذه المتسلسلة نحصل على قيم $y, \nabla y, \nabla^2 y, z, \nabla z, \nabla^2 z$

والتي تشكل الاسطر الثلاثة الاولى من الجدول (3.11) لقيم $x = 0, 0.1, 0.2$ ومن ثم

نحسب قيم y, z عند $x = 0.3, 0.4$ بواسطة المعادلة (3.7.3) باعتبار

ان القيم الصحيحة للمتغيرين y, z عند $x = 0.4$ هي

2.573, 1.903 على التوالي

جدول (١١-٣)

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	z	∇z	$\nabla^2 z$
0	1			2		
0.1	1.205	0.205		2.110	0.110	
0.2	1.420	0.215	0.010	2.240	0.130	0.020
0.3	1.651	0.231	0.016	2.393	0.153	0.023
0.4	1.899	0.248	0.017	2.570	0.177	0.024

من الواضح ان هذه الطريقة يمكن تعميمها الى اي عدد من المعادلات الآتية وكذلك الى الطرق الاخرى من التكامل خطوة بخطوة . وبصورة خاصة فان طريقة اويلر - فوكس قد تعمم ايضا لحل المعادلة الآتية الخطية وللقارىء ان يشتق معادلات المواترة لمنظومة معادلتين آتيتين أو أكثر على نفس النهج المتبع في هذا القسم (انظر المسألة (3.19)

ان حل معادلة تفاضلية من المرتبة n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (3.7.4)$$

يؤول الى حل n من المعادلات الآتية من الدرجة الاولى باجراء التعويضات

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y) \\ y'' &= f'_1 = f_2(x, y, y') = f_2(x, y, f_1) \\ y''' &= f'_2 = f_3(x, y, y', y'') = f_3(x, y, f_1, f_2) \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= f'_{n-1} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(x, y, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

وهكذا فإن اي طريقة لحل معادلات المرتبة الاولى قد تعمم لحل معادلات المرتبة n .

3.8 طريقة ميلني Milne لمعادلات المرتبة الثانية :

Milne's Method for Second-order Equations

من السهل تمديد طريقة ميلني للمنبىء المصحح لمعادلات المرتبة الاولى الى معادلات المرتبة الثانية . فبإعطاء

$$y'' = f(x, y, y'); \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0, \quad (3.8.1)$$

المصحح

يطلق الحل بمتسلسلة تيلر للحصول على قيم الارتكاز الاربعة الاولى للمتغيرات $y_i'' = f_i, y_i, y_i'$ وباستعمال المعادلة (2.10.3) كمنىء عند النقطة $i - 1$ نحصل على :

$$y_{i+1}' = y_{i-1}' + \frac{4h}{3} (2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}). \quad (3.8.2)$$

حيث ان معرفة قيمة y_{i+1}' تسمح باستعمال قانون سمبسون التثلي للتنبؤ بقيمة y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3} (y_{i+1}' + 4y_i' + y_{i-1}'). \quad (3.8.3)$$

ان قيمة $y_{i+1}'' = f_{i+1}$ تقتنى من المعادلة التفاضلية بتعويض قيم y_{i+1}', y_{i+1}

المتنبأ بهما كما تقتنى قيمة y_{i+1}' المصححة بقانون سمبسون التثلي

$$y_{i+1}' = y_{i-1}' + \frac{h}{3} (f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}). \quad (3.8.4)$$

واخيرا تحسب قيمة y_{i+1} المصححة بواسطة المعادلة (3.8.3) . ان العملية قد تعاود غير ان هذا نادرا مايكون ضروريا اذا ما اختيرت h ملائمة من حيث الصغر.

يوضح الجدول (3.12) تالبيق طريقة ميلني لحل المسألة

$$y'' - \frac{3}{2}y' + \frac{1}{2}y = 0; \quad y_0 = 0; \quad y'_0 = 1. \quad (a)$$

حيث استعمال الحل التحليلي للمعادلة $y = 2(e^x - e^{x/2}), y' = 2e^x - e^{x/2}$ للحصول على قيم y_i و y_i' الاربعة الاولى . الجدول (3.12) . ان قيم y الصحيحة في السطر الاخير.

جدول (١٢-٣)

x	0	0.3	0.6	0.9	1.2		1.5		1.8	
					p	c	p	c	p	c
y	0	0.3762	0.9444	1.7826	2.9957	2.9959	4.7285	4.7289	7.1790	7.1793
y'	1.0	1.5380	2.9243	3.3509	4.8154	4.8167	6.8412	6.8451	9.6339	9.6369
y''	1.5	2.1189	2.9692	4.1350	5.7252	5.7274	7.8976	7.9032	10.8614	10.8657
				y		2.9960		4.7294		7.1800

3.9 طريقة آدامز - شتورم لمعادلات المرتبة الثانية.

The Adams-Störmer Method for Second-order Equations

(أ) المعادلة الكاملة

ان حل معادلة من المرتبة الثانية

$$y'' = f(x, y, y') \quad (3.9.1)$$

بالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0 \quad (3.9.2)$$

يؤول الى تكامل معادلتين آتين من المرتبة الاولى بجعل

$$y' = z(x, y), \quad (3.9.3)$$

حيث تصبح المعادلة (3.9.1)

$$y'' = z' = f(x, y, z). \quad (3.9.4)$$

وتطبيق معادلة آدامز (3.9.1) على معادلتين المرتبة الاولى (3.9.3) , (3.9.4)

نحصل على معادلات المتوارة

$$z_{i+1} = z_i + h[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{12}\nabla^2 + \dots]f_i; \quad (3.9.5)$$

$$y_{i+1} = y_i + h[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{12}\nabla^2 + \dots]z_i.$$

ويطلق الحل . كالعادة . بمتسلسلة تيلر ثم يتابع التكامل كما مبين في الجدول (3.13)

حيث حسب القيم اعلى الخط المزدوج من متسلسلة تيلر وتلك الى تحته بالمعادلة (3.9.5) متحركين من اليسار الى اليمين.

جدول (١٣-٣)

i	x	y	z	∇z	$\nabla^2 z$	\dots	f	∇f	$\nabla^2 f$	\dots
$i-2$	x_{i-2}	y_{i-2}	z_{i-2}				f_{i-2}			
$i-1$	x_{i-1}	y_{i-1}	z_{i-1}	∇z_{i-1}			f_{i-1}	∇f_{i-1}		
i	x_i	y_i	z_i	∇z_i	$\nabla^2 z_i$	\dots	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	\dots
$i+1$	x_{i+1}	y_{i+1}	z_{i+1}	∇z_{i+1}	$\nabla^2 z_{i+1}$	\dots	f_{i+1}	∇f_{i+1}	$\nabla^2 f_{i+1}$	\dots
$i+2$	x_{i+2}	y_{i+2}	z_{i+2}	∇z_{i+2}	$\nabla^2 z_{i+2}$	\dots	f_{i+2}	∇f_{i+2}	$\nabla^2 f_{i+2}$	\dots

من الممكن الحصول على شيء من التبسيط في العملية ، حين تنتفي الحاجة للمشتقة y' باختصار z بين المعادلتين (3.9.5) وبذلك يوفر جهد إيجاد فروقها ، ولهذا الغرض ، نطبق المعادلة الثانية من (3.9.5) عند y_i, y_{i+1}

$$y_{i+1} - y_i = h[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{12}\nabla^2 + \dots]z_i;$$

$$y_i - y_{i-1} = h[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{12}\nabla^2 + \dots]z_{i-1},$$

وعند طرح المعادلة الثانية من الاولى يحصل :

$$\begin{aligned} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} &= h[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{12}\nabla^2 + \dots](z_i - z_{i-1}) \\ &= h[1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{1}{12}\nabla^2 + \dots]\nabla z_i. \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

لكن المعادلتين (2.4.11) و (3.9.4) تعطيان

$$\nabla z_i = [1 - \frac{1}{2}hD + \frac{1}{6}h^2D^2 + \dots]hDz_i = [1 - \frac{1}{2}hD + \frac{1}{6}h^2D^2 + \dots]hf_i,$$

وبالتعويض عن قوى hD في الاقواس المستطيلة بمفكوكات الفروق من المعادلات (2.4.16) ، (2.4.17) نحصل على :

$$\nabla z_i = [1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \dots]hf_i.$$

ولدى تعويض قيمة ∇z_i هذه في المعادلة (3.9.6) نحصل على معادلة مواترة آدامز-

شتورمر

$$y_{i+1} = -y_{i-1} + 2y_i + h^2[1 + \frac{1}{12}\nabla^2 + \frac{1}{24}\nabla^3 + \frac{19}{720}\nabla^4 + \frac{3}{40}\nabla^5 + \dots]f_i. \quad (3.9.7)$$

(ب) المعادلات غير الكاملة

متى ما لم يعتمد الطرف الايمن من المعادلة (3.9.1) على y' يمكن انجاز تكاملها بواسطة المعادلة (3.9.7) بمفردها ، على ان المعادلة (3.9.7) يجب ان تستعمل مع اولى المعادلتين (3.9.5) عندما يكون y'' بدلالة y' سنطبق المعادلة (3.9.7) لاستيفاء حل مسألة الرقاص عديم الاحتكاك والتي تنظم بالمعادلة (و) من القسم (3.2) :

$$\ddot{\theta} = -4.6499 \sin \theta, \quad (أ)$$

بالشروط الابتدائية

$$\theta_0 = 2.0944; \quad \dot{\theta}_0 = 0, \quad (ب)$$

والتي يوشربها في القسم (3.2) الجدول (3.2) في هذه الحالة

$$\ddot{\theta} = f(\theta) = -4.6499 \sin \theta$$

لا تعتمد على أي من τ أو θ مما لا يتطلب أكثر من المعادلة (3.9.7) للحل .
ان الجدول (3.14) يعطي نتائج الاستيفاء الذي انطلق بثلاث قيم للمتغير θ , $h = 0.1$,
مع أخذ الفروق الثانية للدالة f .

ان الاستكمال الخطي من الجدول (3.14) يعطي $\theta = 0$ عند $\tau = 0.9978$
وبخطأ مقداره 0.2 في المائة في دورة الاهتزاز كما حسبت بطريقة تكامل القطع الناقص
(elliptic integral) (انظر القسم (3.2))
جدول (٣-١٤)

τ	θ_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$
0	2.0944	-4.0268		
0.1	2.0742	-4.0728	-0.0460	
0.2	2.0132	-4.2021	-0.1293	-0.0833
0.3	1.9101	-4.3849	-0.1828	-0.0535
0.4	1.7631	-4.5643	-0.1794	+0.0034
0.5	1.5705	-4.6499	-0.0856	0.0938
0.6	1.3313	-4.5174	+0.1325	0.2181
0.7	1.0467	-4.0259	0.4915	0.3590
0.8	0.7215	-3.0713	0.9546	0.4631
0.9	0.3652	-1.6605	1.4108	0.4562
1.0	-0.0081			

ان الاستعمال الانى لاولى المعادلتين (3.9.5) مع المعادلة (3.9.7) موضح في
الجدول (3.15) الذي يعطي حل مسألة الرقاص ذي الاحتكاك في القسم (3.2) والتي
تنظم بالمعادلة (ك) :

$$\ddot{\theta} + 0.4\dot{\theta} + 4.6499 \sin \theta = 0, \quad (ج)$$

بالشروط الابتدائية (ب) اعلاه . وباستعمال $h = 1$ وثلاث قيم أولية من حل
متسلسلة تيلر في الجدول (3.3) في هذه الحالة

$$\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}) = -0.4\dot{\theta} - 4.6499 \sin \theta$$

وبذلك تصبح معادلات الموازنة :

$$\theta_{i+1} = \theta_i + 0.1[1 + 0.5\nabla + 0.4167\nabla^2]f_i; \quad (d)$$

$$\theta_{i+1} = -\theta_{i-1} + 2\theta_i + 0.01[1 + 0.0833\nabla^2]f_i.$$

ان الاستكمال الخطي بين $\tau = 1.0$ $\tau = 1.1$ يعطي $\tau = 1.0763$ لزمن مرور الرقاص في الموضع الشاقولي بزيادة 7.63% على زمن الرقاص غير المتخامد .

جدول (١٥ - ٣)

τ	θ_i	θ_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$
0	2.0944	0	-4.0268		
0.1	2.0745	-0.3963	-3.9139	0.1129	
0.2	2.0153	-0.7865	-3.8833	+0.0306	-0.0823
0.3	1.9172	-1.1767	-3.9030	-0.0197	-0.0503
0.4	1.7800	-1.5701	-3.9205	-0.0175	+0.0022
0.5	1.6036	-1.9629	-3.8624	+0.0581	0.0756
0.6	1.3886	-2.3431	-3.6355	0.2269	0.1688
0.7	1.1374	-2.6883	-3.1445	0.4910	0.2641
0.8	0.8550	-2.9672	-2.3219	0.8226	0.3316
0.9	0.5497	-3.1444	-1.1713	1.1506	0.3280
1.0	0.2330	-3.1903	+1.0452	2.2165	1.0659
1.1	-0.0724	-2.9305			

3.10 طريقة فوكس Fox لمعادلات المرتبة الثانية الخطية.

Fox's Methods for Second-order Linear Equations

من الممكن الحصول على صيغة بسيطة لتكامل معادلة المرتبة الثانية الخطية

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = F(x) \quad (3.10.1)$$

بالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0 \quad (3.10.2)$$

بالطريقة التي اقترحها فوكس . تضرب المعادلة بالكمية h° لتصبح

$$h^2 y'' + hf(x)(hy') + h^2 g(x)y = h^2 F(x)$$

ثم يعوض عن hy' , h^2y'' بما يقابلهما من مفكوك الفروق المركزية في المعادلة (2.7.16) ويجعل $x = ih$ واطلاق F_i , g_i , f_i , y_i على قيم F , g , f , y عند x_i

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \frac{h}{2}f_i(y_{i+1} - y_{i-1}) + h^2g_iy_i \\ = h^2F_i + \left(\frac{\delta^4}{12} - \frac{\delta^6}{90} + \dots\right)y_i + hf_i\mu\left(\frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^5}{30} + \dots\right)y_i.$$

ويحل هذه المعادلة لقيمة y_{i+1} نحصل على صيغة فوكس لمعادلات الدرجة الثانية الخطية

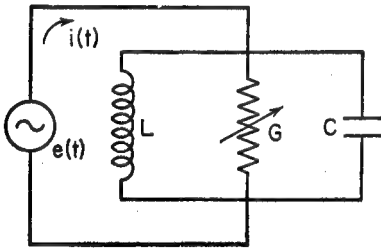
$$y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1 + \frac{h}{2}f_i} \left[-\left(1 - \frac{h}{2}f_i\right)y_{i-1}^{(n)} + (2 - h^2g_i)y_i^{(n)} + h^2F_i + \epsilon_{i+1}^{(n-1)} \right] \quad (3.10.3)$$

حيث ان التصحيح $\epsilon_{i+1}^{(n-1)}$ هو من مرتبة h^4 ويساوي

$$\epsilon_{i+1}^{(n-1)} = \left(\frac{\delta^4}{12} - \frac{\delta^6}{90} + \dots\right)y_i^{(n-1)} + hf_i\mu\left(\frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^5}{30} + \dots\right)y_i^{(n-1)}, \quad (3.10.4)$$

يطلق الحل y بواسطة متسلسلة تيلر لغرض الحصول على y_1 ثم يتم الاستيفاء بواسطة المعادلة (3.10.3) مع اهمال التصحيح . وتستعمل فروق التقريب الاولى $y^{(1)}$ المحسوبة بهذه الطريقة لايجاد قيمة $\epsilon^{(1)}$ ثم تستعمل المعادلة (3.10.3) ثانية مع $\epsilon^{(1)}$ للحصول على تقريب ثان . $y^{(2)}$. للمتغير y . وتكرر العملية الى ان تتطابق قيم التصحيح في تقريبين متعاقبين

لغرض توضيح هذه العملية ، تؤخذ الدارة الكهربائية في الشكل (3.3) حيث المحثة L . والتوصيل المتغير $G(t)$ والسعة C مربوطة بالتوازي . فاذا ما تغيرت $G(t)$ حسب القانون



$$G(t) = G_0(1 + a \sin 10^3 t), \quad (a)$$

شكل (3-3)

فان قانون كيرشهوف الثاني* يعطي المعادلة ادناه للفولتية (الجهد) e

$$C \frac{de}{dt} + G(t)e + \frac{1}{L} \int e dt = i$$

او . بعد المفاضلة بالنسبة الى t والقسمة على C نحصل على

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{G(t)}{C} \frac{de}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{1}{C} \frac{dG(t)}{dt} \right) e = \frac{1}{C} \frac{di}{dt}$$

وبأخذ $C = 1$ ميكروفاراد (10^{-6} فاراد) $L = 0.02778$ هنري $G_0 = 0.007$

مو mho , $0.5 = a$

$$i = (10^{-9}/6) \sin 6 \cdot 10^3 t$$

وباهمال الجزء المتغير مع الزمن .

$$\frac{1}{C} \frac{dG}{dt} = 3.5 \cdot 10^8 \cos 10^3 t,$$

مقارنة بالحد الثابت $1/LC = 36 \times 10^6$, تصبح معادلة الفولتية

$$\frac{d^2e}{dt^2} + 7000(1 + 0.5 \sin 10^3 t) \frac{de}{dt} + 36 \cdot 10^6 e = \cos 6 \cdot 10^3 t.$$

وتتغير وحدة الزمن من t بالثواني الى τ بالكيلوثانية ($\tau = 10^3 t$)

تتغير المعادلة الى :

$$\ddot{e} + 7(1 + 0.5 \sin \tau) \dot{e} + 36e = \cos 6\tau \quad (\text{ب})$$

حيث ترمز النقطة الى المفاضلة بالنسبة الى τ . وتقتضي حالة السكون الابتدائية ان

$$e(0) = e_0 = 0; \quad \dot{e}(0) = \dot{e}_0 = 0. \quad (\text{ج})$$

انظر Differential Equations, Sec. 1.7

وردت خطأ في الاصل الانكليزي وغيرت هنا الى . لتحقيق الانسجام مع المعادلة النهائية (ب)

(المترجم)

(د) لغرض حل المعادلة كاملة دون اهمال الحد dG/dt ندع dv/dt ثم نكتب معادلة الدالة الكهربائية بدلالة

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{G(t)}{C} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = i.$$

ولدى حل هذه المعادلة للمتغير v . تقتنى $e(t)$ بالتفاضل .

(هـ) وردت خطأ . ميللي ثانية . في الاصل الانكليزي (المترجم)

إطلاق الحل ترتب المعادلة (ب) :

$$\ddot{e} = -7(1 + 0.5 \sin \tau)\dot{e} - 36e + \cos 6\tau; \quad \ddot{e}_0 = 1$$

وبالتفاضل

$$\ddot{e} = -7(1 + 0.5 \sin \tau)\dot{e} - (3.5 \cos \tau + 36)e - 6 \sin 6\tau; \quad \ddot{e}_0 = -7;$$

$$e^{iv} = -7(1 + 0.5 \sin \tau)\ddot{e} - (7 \cos \tau + 36)\dot{e} + (3.5 \sin \tau)\dot{e} - 36 \cos 6\tau; \\ e_0^{iv} = -30.$$

وبهذا يقتنى مفكوك متسلسلة $e(\tau)$ في جوار الاصل :

$$e(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{7}{6}\tau^3 - \frac{5}{4}\tau^4 = 0.5\tau^2 - 1.1667\tau^3 - 1.25\tau^4,$$

ومنه

$$e(0.05) = 0.00110; \quad e(0.10) = 0.00371.$$

ان تطبيق المعادلة (3.10.3) على مسألة الشروط الابتدائية (ب) . (ج)

حيث

$$h = 0.1; \quad f(\tau) = 7(1 + 0.5 \sin \tau); \quad g(\tau) = 36; \quad F(\tau) = \cos 6\tau,$$

: يعطى معادلة الموازنة للتقريب الاول $e^{(1)}$ للمتغير

$$e_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{1 + 0.05f_i} [-(1 - 0.05f_i)e_{i-1}^{(1)} + 1.64e_i^{(1)} + 0.01F_i], \quad (d)$$

حيث اهميل = وانطلاقا من $e_0^{(1)} = 0$ و $e_1^{(1)} = 0.00371$ تقتنى النتائج المدونة في

الجدول 3.16

جدول (٣-١٦)

τ	f_i	$1 + 0.05f_i$	$1 - 0.05f_i$	$0.01F_i$	$e_i^{(1)}$
0	7.00000				0
0.1	7.34944	1.36747	0.63253	0.00825	0.00371
0.2	7.69534	1.38477	0.61523	+0.00362	0.01048
0.3	8.03432	1.40172	0.59828	-0.00227	0.01337
0.4	8.36297	1.41815	0.58185	-0.00737	0.00955
0.5	8.67801	1.43390	0.56610	-0.00990	+0.00036
0.6	8.97624	1.44881	0.55119	-0.00897	-0.01026
0.7	9.25477	1.46274	0.53726	-0.00490	-0.01794
0.8	9.51076	1.47554	0.52446	+0.00087	-0.01969
0.9	9.74166	1.48708	0.51292	0.00635	-0.01491
1.0	9.94514	1.49726	0.50274	0.00960	-0.00538
1.1	10.11924	1.50596	0.49404		+0.00552

ولتقييم تقرب ثان بتصحيح فوكس . تؤخذ فروق $e^{(1)}$ وحسب التصحيح بالاقصار على حديه الاولين :

$$e_{i+1}^{(1)} = \left(\frac{\delta^4}{12} + hf_i \frac{\mu \delta^3}{6} \right) e_i^{(1)} = (0.08333\delta^4 + 0.01667f_i \mu \delta^3) e_i^{(1)}. \quad (e)$$

وتظهر نتائج هذه الحسابات في الجدول 3.17

جدول (١٧ - ٣)

τ	$e_i^{(1)}$	$10^3 \delta e_{i+1/2}^{(1)}$	$10^3 \delta^2 e_i^{(1)}$	$10^3 \delta^3 e_i^{(1)}$ and $10^3 \mu \delta^3 e_i^{(1)}$	$10^3 \delta^4 e_i^{(1)}$	$e_{i+1}^{(1)}$	$e_i^{(2)}$	$e_i^{(3)}$
0	0						0	0
0.1	0.00371	371	+306	(-250) -694	(250)	-0.00010	0.00371	0.00371
0.2	0.01048	677	-388	(-488) -283	411	-0.00028	0.01040	0.01040
0.3	0.01337	+289	-671	(-75) +134	417	+0.00025	0.01308	0.01305
0.4	0.00955	-382	-537	(264) 394	260	0.00058	0.00942	0.00938
0.5	+0.00036	-919	-143	(415) 437	+43	0.00064	+0.00073	+0.00096
0.6	-0.01026	-1062	+294	(368) 299	-138	0.00044	-0.00934	-0.00909
0.7	-0.01794	-768	593	(180) +60	-239	+0.00008	-0.01673	-0.01656
0.8	-0.01969	-175	653	(-59) -178	-238	-0.00029	-0.01862	-0.01851
0.9	-0.01491	+478	475	(-258) -338	-160	-0.00055	-0.01435	-0.01468
1.0	-0.00538	953	137	(-400)	(0)	-0.00066	-0.00550	-0.00588
1.1	+0.00552	1090		(-250)	(200)	-0.00026	+0.00476	+0.00445

اقتنيت قيم $\delta^4 \mu \delta^3$ (داخل الاقواس) عند $\tau = 0.1, 1.0, 1.1$ بالاستيفاء بالنظر ، غير ان قيم $\mu \delta^3$ (في الاقواس) عند τ من 0.2 الى 0.9 تمثل متوسط القيمتين δ^3 المتجاورتين .

ان قيم $e_{i+1}^{(1)}$ تقنى بمعادلة الموارة :

$$e_{i+1}^{(2)} = \frac{1}{1 + 0.05f_i} [-(1 - 0.05f_i)e_{i-1}^{(2)} + 1.64e_i^{(2)} + 0.01F_i + e_{i+1}^{(1)}], \quad \dots (و)$$

حيث تؤخذ قيمة $e_{i+1}^{(1)}$ من الجدول 3.17 وبأخذ فروق $e_i^{(2)}$ تحسب التصحيحات الجديدة $e_{i+1}^{(2)}$ ومن ثم $e_i^{(2)}$ المدونة في العمود الاخير من الجدول 3.17 وعندما يظهر ان فروقات $e_i^{(3)}$ وتصحيحاتها مطابقة لتصحيحات $e_i^{(2)}$ وعند هذه النقطة توقف العملية .

من الممكن تجنب اطلاق الحل بطريقة متسلسلة تيلر المستهلكة للوقت . مع التضحية ببعض الدقة . بالتعبير عن الشرط الابتدائي الثاني في المعادلة (3.10.2) بدلالة الفروق المركزية المعدلة (averaged) وتطبيق المعادلة (3.10.3) . دون تصحيح . عند الاصل

$$y_1 - y_{-1} = 2hy'_0;$$

$$\left(1 + \frac{h}{2}f_0\right)y_1 + \left(1 - \frac{h}{2}f_0\right)y_{-1} = (2 - h^2g_0)y_0 + h^2F_0.$$

وباختصار قيمة الارتكاز المصطنعة y_{-1} بين المعادلتين :

$$y_1 = \left(1 - \frac{h}{2}f_0\right)hy'_0 + \left(1 - \frac{h^2}{2}g_0\right)y_0 + \frac{h^2}{2}F_0. \quad (3.10.5)$$

وفي حالة المعادلتين (ب) و(ج) تكون :

$$e_1 = \frac{h^2}{2}F_0 = \frac{(0.1)^2}{2} \cos 0 = 0.005,$$

ومن ثم بتطبيق الطريقة الاصلية . المعادلة (د) .

$$e_2 = 0.01048; \quad e_3 = 0.01280; \quad e_4 = 0.00888.$$

ان دقة هذه الطريقة تعتمد على الاهمية النسبية للخطوة h على قيمة e_1
ان طرق فوكس في هذا البند والبند 3.6 ملائمة للحاسبات القادرة على اخذ الفروق تلقائيا.

3.11 طرق نوميروف *Numerov's Methods*

عندما تكون المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية خالية من حد المشتقة الاولى y'
أي أن صيغتها : -

$$y'' + f(x)y = F(x), \quad (3.11.1)$$

فان تكاملها قد ينجز بطريقة فعالة تعود الى نوميروف . بضرب المعادلة (3.11.1) بالمقدار h^2
وتعويض المشتقة الثانية بمفكوكها من الفروق المركزية المعادلة (2.7.15) . تصبح

$$\left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots\right)y_i + h^2f_i y_i = h^2F_i. \quad (a)$$

وبالتأثير على طرفي المعادلة بالمؤثر $\left(1 + \frac{\delta^2}{12}\right)$ يختصر حد δ^4 وتأخذ المعادلة الصيغة التالية :

$$\left(\delta^2 + \frac{\delta^8}{240} - \frac{13\delta^8}{15,120} + \dots\right) y_i + h^2 f_i y_i + \frac{h^2 \delta^2}{12} (f_i y_i) = h^2 F_i + \frac{h^2 \delta^2}{12} F_i$$

أو

$$\begin{aligned} \text{or } y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + h^2 f_i y_i + \frac{h^2}{12} (f_{i+1} y_{i+1} - 2f_i y_i + f_{i-1} y_{i-1}) \\ = h^2 F_i + \frac{h^2}{12} (F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}) - \left(\frac{\delta^6}{240} - \frac{13\delta^8}{15,120} + \dots\right) y_i \end{aligned}$$

ولدى حل هذه المعادلة للمتغير y_{i+1} نحصل على قاعدة مواترة نوميروف

$$\begin{aligned} y_{i+1}^{(n)} = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{12} f_{i+1}} \left[-\left(1 + \frac{h^2}{12} f_{i-1}\right) y_{i-1}^{(n)} + \left(2 - \frac{5h^2}{6} f_i\right) y_i^{(n)} \right. \\ \left. + \frac{h^2}{12} (F_{i-1} + 10F_i + F_{i+1}) + \epsilon_{i+1}^{(n-1)} \right], \quad (3.11.2) \end{aligned}$$

حيث :

$$\epsilon_{i+1}^{(n-1)} = -\left(\frac{\delta^6}{240} - \frac{13\delta^8}{15,120} + \dots\right) y_i^{(n-1)}. \quad (3.11.3)$$

يلاحظ ان قيمتي y_1 , y_0 فقط مطلوبتان لانطلاق الحل ، كما ان التصحيح ، الذي هو من مرتبة h^6 غالبا مايكون تافها حتى لقيم h الكبيرة .

لتوضيح استعمال المعادلة (3.11.2) خذ الدائرة الكهربائية في الشكل (3.4) بمحاثة وسعة مربوطتين على التوالي وحيث تتغير السعة حسب القانون

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} (1 + a \cos 10^3 t).$$

ان شحنة المكثف $q(t)$ تحقق المعادلة :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = \frac{1}{L} e(t).$$

فإذا كان $1/(LC_0) = 36 \cdot 10^6$ بوحدات عملية . تصبح المعادلة

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 36 \cdot 10^6 (1 + 0.4 \cos 10^3 t) q = \cos 6 \cdot 10^3 t$$

أو . عندما ندع $\tau = 1000t$

$$\ddot{q} + 36(1 + 0.4 \cos \tau) q = \cos 6\tau,$$

حيث ترمز النقاط الى التفاضل بالنسبة الى τ . ان شروط السكون الابتدائية تتطلب :

$$q(0) = q_0 = 0; \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = i(0) = 0. \quad (ج)$$

لا طلاق الحل تفاضل

$$\ddot{q} = -36(1 + 0.4 \cos \tau) q + \cos 6\tau; \quad \ddot{q}_0 = 1$$

$$\ddot{\ddot{q}} = -36(1 + 0.4 \cos \tau) \dot{q} + 14.4 (\sin \tau) \dot{q} - 6 \sin 6\tau; \quad \ddot{\ddot{q}}_0 = 0$$

$$q^{iv} = -36(1 + 0.4 \cos \tau) \ddot{q} + 28.8 (\sin \tau) \ddot{q} + 14.4 (\cos \tau) \dot{q} - 36 \cos 6\tau;$$

$$q_0^{iv} = -86.4,$$

ونحصل على مفكوك المتسلسلة النافذ في جوار صفر

$$q(\tau) = \frac{\tau^2}{2} - \frac{86.4\tau^4}{24} = 0.5\tau^2 - 3.6\tau^4,$$

لذا

$$q(0.1) = q_1 = 0.00464$$

ان تطبيق المعادلة (3.11.2) دون التصحيح : على مسألة الشروط الابتدائية (ب)

و(ج) بالقيم

$$h = 0.1; \quad f(\tau) = 36(1 + 0.4 \cos \tau); \quad F(\tau) = \cos 6\tau,$$

تعطي معادلة المواترة :

$$q_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{1 + \frac{0.01}{12} f_{i+1}} \left[- \left(1 + \frac{0.01}{12} f_{i-1} \right) q_{i-1}^{(1)} + \left(2 - \frac{5}{6} 0.01 f_i \right) q_i^{(1)} + \frac{0.01}{12} (F_{i-1} + 10F_i + F_{i+1}) \right] \quad (د)$$

وانطلاقاً من $q_1 = 0.00464, q_0 = 0$ تعطي المعادلة (د) النتائج المدونة في الجدول

8.18 الذي يحوي حل المعادلة ذات المعاملات الثابتة المناظرة للمعادلة (ب) :

$$\ddot{q} + 36q = \cos 6\tau,$$

جدول (١٨-٣)

τ	f_i	$1 + \frac{0.01}{12} f_i$	$2 - \frac{5}{6} 0.01 f_i$	$\frac{0.01}{12} (F_{i-1} + 10F_i + F_{i+1})$	q	q_c
0	50.4	1.04200	1.58002		0	0
0.1	50.328	1.04194	1.58062		0.00464	-0.00471
0.2	50.11308	1.04176	1.58241	0.00801	0.01475	0.01553
0.3	49.75704	1.04146	1.58537	+0.00352	0.02115	0.02435
0.4	49.26312	1.04105	1.58949	-0.00221	+0.01532	0.02252
0.5	48.63708	1.04053	1.59471	-0.00716	-0.00465	+0.00588
0.6	47.88504	1.03990	1.60097	-0.00961	-0.03171	-0.00221
0.7	47.01384	1.03918	1.60823	-0.00871	-0.05258	-0.05084
0.8	46.03248	1.03836	1.61641	-0.00476	-0.05426	+0.06641
0.9	44.95104	1.03746	1.62542	+0.00085	-0.03105	-0.05796
1.0	43.78032	1.03648	1.63518	0.00616	+0.01161	-0.00233
1.1	42.53184	1.03544		0.00932	0.05845	+0.02856

والتي تنفي بالشروط (ج) . أي

$$q_c = \frac{\tau}{12} \sin 6\tau. \quad (هـ)$$

ان التصحيحات المقيمة بواسطة المعادلة (3.11.3) تغير الرقم الاخير من q بوحدة أو وحدتين وهي لهذا قابلة للاهمال .

ويمكن تعميم طريقة نوميروف لحل معادلات مرتبة مشتقاتها زوجية ومن أي مرتبة والتي معاملها المتغير الوحيد هو معامل y . ولتؤخذ معادلة المرتبة الرابعة .

$$y^{iv} + cy'' + f(x)y = F(x), \quad (3.11.4)$$

كمثال حيث ان ضرب حدودها بالمقدار h^4 والتعويض عن $h^4 y^{iv}$ ، $h^2 y''$ بمفكوكات فروقها المركزية يقود الى المعادلة المناظرة :

$$\left[\left(\delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7}{240} \delta^8 - \dots \right) + ch^2 \left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots \right) + h^4 f_i \right] y_i = h^4 F_i. \quad (9)$$

وباستعمال المؤثر $\delta^2 + \alpha$ على المعادلة . حيث α ثابت غير معين . نحصل على :

$$\left[\left(\delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \dots \right) + \alpha \left(\delta^6 - \frac{\delta^8}{6} + \dots \right) + ch^2 \left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots \right) + \alpha ch^2 \left(\delta^4 - \frac{\delta^6}{12} + \dots \right) + h^4 f_i \right] y_i + \alpha h^4 \delta^2 (f_i y_i) = h^4 (1 + \alpha \delta^2) F_i. \quad (ج)$$

وتم اختيار قيمة α بحيث يصبح معامل $\delta^6 y_i$ في المعادلة (ج) صفراً :

$$\alpha = \frac{2}{15} \left[\frac{15 - ch^2}{12 - ch^2} \right]. \quad (3.11.5)$$

وبقيمة α هذه ومع أهمال الفروق التي مرتبتها اعلى من ستة تصبح المعادلة (ج) كما يلي :

$$[1 + ch^2(\alpha - \frac{1}{12})] \delta^4 y_i + ch^2 \delta^2 y_i + h^4 (1 + \alpha \delta^2) f_i y_i = h^4 (1 + \alpha \delta^2) F_i. \quad (3.11.6)$$

ويمكن حل هذه المعادلة للمتغير y_{i+2} بدلالة y_{i+1}, y_i, y_{i-1} مما يسمح بالتكامل خطوة فخطوة باربع قيم انطلاق وبخطأ من مرتبة h^8 .

وللحصول على قيم الانطلاق الاربعة تستعمل متسلسلة تيلر أو تستعمل اربع معادلات فروق مشتقة من الشروط الابتدائية الثلاثة y''', y'', y' ومن المعادلة التفاضلية في نقطة الاصل ، وتشتمل هذه المعادلات خمس نقاط $y_2, y_1, y_0, y_{-1}, y_{-2}$ واحدة منها y معلومة . ويعطي الجدول 3.19 حل المعادلة.

$$y^{iv} - 10^4 y = 0; \quad y_0 = 1; \quad y'_0 = 0; \quad y''_0 = -100; \quad y'''_0 = 0, \quad (ح)$$

حيث اخذت نقاط الانطلاق الاربعة من الحل الصحيح $y = \cos 10x$ وفي هذه الحالة

$$c = 0; \quad f(x) = -10^4; \quad \alpha = \frac{1}{8}; \quad F(x) = 0,$$

تصبح معادلة الموازنة :

$$y_{i+2}^{(1)} = (4 + \frac{1}{8} 10^4 h^4) y_{i+1} - (6 - \frac{3}{8} 10^4 h^4) y_i + (4 + \frac{1}{8} 10^4 h^4) y_{i-1} - y_{i-2} \quad (ط)$$

كما يحوي الجدول 3.19 على الحل المقتنى من معادلة المواترة :

$$y_{i+2}^{(2)} = 4y_{i+1} - (6 - 10^4 h^4)y_i + 4y_{i-1} - y_{i-2} \quad (ي)$$

التي اشتقت باستعمال الحدود الاولى لمفكوك الفروق المركزية المعادلة (و) وكذلك على القيمة الصحيحة للمتغير h .

جدول (٣-١٩)

x	$y_i = \cos 10x$	$y_i^{(1)}$	$e\%_1$	$y_i^{(2)}$	$e\%_2$
0.4	-0.6536	-0.6546	0.15	-0.7183	9.8
0.5	0.2837	0.2784	1.90	-0.1279	

باستعمال المؤثر $(1 + \alpha\delta^2 + \beta\delta^4)$ على المعادلة (أ) واختيار α, β بحيث تصبح معاملات $\delta^6 y_i, \delta^4 y_i$ صفرا . يمكن التوصل الى معادلة مواترة بخطأ من مرتبة h^8 . الجدول 3.20 يوضح هذه العملية مطبقة على المسألة

$$y'' + 100y = 0; \quad y_0 = 1; \quad y'_0 = 0.$$

في هذه الحالة تكون

$$\alpha = \frac{1 + \frac{2}{15}ch^2}{12 + ch^2}; \quad \beta = -\frac{\frac{1}{60}}{12 + ch^2}. \quad (ك)$$

وتكون قواعد المواترة ذات الخطأ من مرتبة h^8, h^6, h^4 على التوالي . باستعمال $h = 0.1$

$$\begin{aligned} y_{i+1}^{(1)} &= -y_{i-1}^{(1)} + y_i^{(1)}; \\ y_{i+1}^{(2)} &= -y_{i-1}^{(2)} + \frac{14}{3}y_i^{(2)}; \\ y_{i+1}^{(3)} &= -y_{i-1}^{(3)} + \frac{22}{15}y_i^{(3)}. \end{aligned} \quad (ل)$$

3.12 حل معادلات القيم المميزة بطريقة التكامل الامامية :

Solution of Characteristic Value Problems by Forward Integration

معادلات القيم المميزة احادية البعد تحكم بمعادلات تفاضلية . اعنيادية متجانسة ذات شروط حدودية متجانسة . إن الحلول غير الصفيرة لهذه المسائل توجد لقيم مميزة . من وسط parameter والتي يجب تعيينها . إن الحل العددي لمسائل القيم المميزة هو احد الفروع المهمة للتحليل العددي الحديث . كما انه اساسي في مجال الاهتزازات

والاستقرار المرن . ستوضح هنا طريقة التكامل الالامية . بينما سيعطي حل بالفروق المركزية والمعادلات الآتية في القسم 4.7 .

ان buckling أو يلر لعبة بسيطة المسند يحكم بمسألة القيم المميزة

$$y'' + \frac{PL^2}{EI} y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (3.12.1)$$

حيث L طول العتبة EI جسوتها الانثنائية P الدفع و اشارات الفتحة (prime signs)
تعني التفاضل بالنسبة الى المتغير الالبعدي $z = x/L$ بضرب المعادلة (3.12.1)

بالمقدار $h^2 = 1/n^2$ وتعويض فروق مركزية من مرتبة h^2 عن $h^2 y''$ نحصل على قاعدة المواورة :

$$y_{i+1} = -y_{i-1} + (2 - k^2 h^2) y_i, \quad (3.12.2)$$

حيث

$$k^2 = \frac{PL^2}{EI}. \quad (3.12.3)$$

ينطلق التكامل بقيمة تجريبية k_0^2 بدلا من k^2 و $y_1 = 1$ لان المسألة المتجانسة للمعادلة

جدول (٣-٢١)

i	z_i	y_i
0	0.00	0.0000
1	0.25	1.0000
2	0.50	1.2500
3	0.75	0.5625
4	1.00	-0.5469

(3.12.1) تعرف (تحدد) n من ثابت ضارب . يعطي الجدول 3.21 نتائج التكامل

باستعمال $n = 4; k_0^2 = 12$ حيث تصبح معادلة المواورة :

$$y_{i+1} = -y_{i-1} + 1.25 y_i. \quad (a)$$

* See L. Collatz, *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung*, Chelsea Publishing Company, New York, 1948.

() انظر مثلا المعادلات التفاضلية البند 1.7

(+) جسوتها الانثنائية Flexural rigidity

وبين الاستكمال الخطي بان y تساوي صفرا عند $z = 0.8768$ وحيث انه يمكن بيان كون k^2 تتناسب طرديا مع $1/L^2$ وان الطول اللابعدى للعتبة هو $z = 1$. لذا فان قيمة k^2 هي

$$k^2 = (0.8768)^2 k_0^2 = 9.2256$$

بخطأ مقداره 6.5 بالمائة نسبة الى π^2 $k^2 = \pi^2$
يعطي الجدول 3.22 التكامل باستعمال $k_0^2 = 9$; $n = 10$ أي للمعادلة

$$y_{i+1} = -y_{i-1} + 1.91y_i. \quad (b)$$

ويعطي الاستكمال الخطي في هذه الحالة $y = 0$ عند $z = 1.0433$ ولذا فان

$$k^2 = (1.0433)^2 \times 9 = 9.7965,$$

بخطأ مقداره 0.74

كما يحوي الجدول 3.22 قيم $y_{i+1} - y_{i-1}$ التي تتناسب طرديا مع y'_i وبين الاستكمال الخطي ان $y'_i = 0$ عند $z = 0.5218$ وباعتبار هذا طول عتبة حديدية (cantilever beam) نحصل على k^2 المناظرة .

$$k^2 = (0.5218)^2 \times 9 = 2.4507$$

جدول (٢٢-٣)

i	z_i	y_i	$y_{i+1} - y_{i-1}$
0	0.0	0.0000	
1	0.1	1.0000	1.9100
2	0.2	1.9100	1.6481
3	0.3	2.6481	1.2379
4	0.4	3.1479	0.7163
5	0.5	3.3644	0.1302
6	0.6	3.2781	-0.4676
7	0.7	2.8968	-1.0233
8	0.8	2.2548	-1.5769
9	0.9	1.4099	-1.8167
10	1.0	0.4381	-1.9830
11	1.1	-0.5731	

وبخطأ مقداره 0.67 % مقارنة $\pi^2/4$ بقيمة

ولاستعمال صيغة تكامل فعالة تطبق معادلة نوميروف (3.11.2) على المسألة :

$$y'' + k^2(1 + \sin \pi z)y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (3.12.4)$$

التي تحكم حدل عتبة بسيطة المسند ذات عزم قصور ذاتي متغير $I(z)=I_0/(1+\sin \pi z)$ تصبح معادلة المواترة في هذه الحالة

$$y_{i+1} = \frac{1}{1 + \frac{k^2 h^2}{12} (1 + \sin \pi z_{i+1})} \left\{ \left[2 - 10 \frac{k^2 h^2}{12} (1 + \sin \pi z_i) \right] y_i - \left[1 + \frac{k^2 h^2}{12} (1 + \sin \pi z_{i-1}) \right] y_{i-1} \right\}. \quad (3.12.5)$$

يبين الجدول 3.23 التكامل باستعمال $k_0^2 = PL^2 / EI_0 = 8, n = 4$

جدول (٣-٢٣)

i	z_i	$1 + \frac{k^2 h^2}{12} (1 + \sin \pi z_i)$	$2 - 10 \frac{k^2 h^2}{12} (1 + \sin \pi z_i)$	y_i
0	0.00	1.0417	1.5833	0
1	0.25	1.0711	1.2887	1.0000
2	0.50	1.0833	1.1667	1.1896
3	0.75	1.0711	1.2887	0.2957
4	1.00	1.0417	1.5833	-0.8713

وبالاستكمال الخطي $y = 0$ عند $z = 0.8133$ لذا

$$k^2 = (0.8133)^2 \times 8 = 5.2920,$$

بخطا مقداره $e = 0.71$ بالمائة مقارنة بالحل الصحيح 5.33 المقتنى بالمعادلة .

3.13 معادلات الفروق :

Difference Equations

استعملت الفروق المحددة في الاقسام السابقة لتحويل المعادلة التفاضلية الى معادلة مواترة . تتضمن قيم التكامل المجهولة في نقاط الارتكاز . وذلك من اجل حل مسألة الشروط الابتدائية . ثم استعملت قواعد المواترة هذه لتحديد قيمة y_i حال معرفة قيم الارتكاز السابقة لها . ان نفس الاسلوب سيطبق على مسائل القيم الحدودية في فصول قادمة . حيث سيتجلى ان قيم الارتكاز y_i تفي بمجموعة آنية من المعادلات الجبرية الخطية.

ان حل معادلة مواترة الفروق المحدودة . التي تربط عددا من نقاط الارتكاز المتساوية البعد على الاحداثي x . هو عملية من الجوهرية في التفاضل والتكامل العددي بحيث ان نظرية كاملة للمعادلات الفروقية . تناظر نظرية المعادلات التفاضلية قد نشأت .

ولاغراض هذا الكتاب . يكون من الضروري تطوير نظرية المعادلات الفروقية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة فقط . اي معادلات على الطراز التالي

$$y_{k+n} + A_{n-1}y_{k+n-1} + A_{n-2}y_{k+n-2} + \dots + A_1y_{k+1} + A_0y_k = 0, \quad (3.13.1)$$

حيث n^{**}, k اعداد صحيحة والمعاملات A ثابتة .

باستعمال مؤثر الخطوة $E \equiv e^{hD}$, step-operator

$$Ey_k = y_{k+1} \quad (3.13.2)$$

وقواه : powers

$$E^2y_k = y_{k+2}; \quad E^3y_k = y_{k+3}; \quad \dots; \quad E^ny_k = y_{k+n}, \quad (3.13.3)$$

والذي هو مناظر للمؤثر D . يمكن كتابة معادلة الفروق (3.13.1) بالصيغة التالية

$$(E^n + A_{n-1}E^{n-1} + A_{n-2}E^{n-2} + \dots + A_1E + A_0)y_k = 0. \quad (3.13.4)$$

ويقتنى حل المعادلة (3.13.4) بواسطة الدالة التجريبية

$$y_k = z^k, \quad (3.13.5)$$

حيث عدد مركب (أو حقيقي) . ان تعويض المعادلة (3.13.5) في (3.13.1)

يعطي :

$$(z^n + A_{n-1}z^{n-1} + A_{n-2}z^{n-2} + \dots + A_1z + A_0)z^k = 0, \quad (3.13.6)$$

ولكي تكون y_k حلا لمعادلة الفروق مهما كانت قيمة العدد الصحيح k . يجب ان

تكون z جذرا للمعادلة الجبرية (المعادلة المميزة)

$$z^n + A_{n-1}z^{n-1} + A_{n-2}z^{n-2} + \dots + A_1z + A_0 = 0. \quad (3.13.7)$$

* See Differential Equations, Chap. 3.

(*) هامش ص

انظر الفصل الثالث . المعادلات التفاضلية

(**) استعمال العداد k هنا بدلا عن i لتقادي الالتباس مع العدد الخيالي . بينما تمثل n مرتبة المعادلة .

(أ) عندما تكون الجذور z_j ($j = 1, 2, \dots, n$) للمعادلة (3.13.7) حقيقية ومتباينة يمكن تحليل المعادلة (3.13.6) الى عواملها

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n)z^k = 0$$

ويكون حلها العام كالآتي :

$$y_k = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + \dots + C_n z_n^k, \quad (3.13.8)$$

حيث C_j ثوابت اختيارية تحددها شروط المسألة

وكمثال لناخذ المعادلة الفروقية :

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 0 \quad (a)$$

بالشروط

$$y_0 = 0; \quad y_4 = 10, \quad (b)$$

ومعادلتها المميزة

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

لها جذران حقيقيان $z_2 = 3, z_1 = 1$

كالآتي :

$$y_k = C_1 \cdot 1^k + C_2 \cdot 3^k \quad (c)$$

ويتطلب الشرطان (b) كون

$$C_1 + C_2 = 0; \quad C_1 \cdot 1^4 + C_2 \cdot 3^4 = 10; \quad C_1 = -C_2 = -\frac{1}{8},$$

ويصبح الحل الخاص للمسألة (a), (b)

$$y_k = \frac{1}{8}(3^k - 1^k). \quad (d)$$

من المفضل احيانا ان يكتب الحل العام للمعادلة الفروقية بصيغة أسية باستعمال لوغاريتمات الجذور z_j أي :

$$r_j = \ln z_j; \quad z_j = e^{r_j} \quad (3.13.9)$$

ولذا تصبح المعادلة (3.13.8)

$$y_k = C_1 e^{r_1 k} + C_2 e^{r_2 k} + \dots + C_n e^{r_n k}. \quad (3.13.10)$$

(ب) عندما يكون للمعادلة المميزة جذر حقيقي z_1 ، مكرر مرتين ، يكون للمعادلة

(3.13.4) عامل هو :

$$y_{k+2} - 2z_1 y_{k+1} + z_1^2 y_k. \quad (e)$$

ومن السهل التأكد . بالتعويض . من أن :

$$y_k = k z_1^k \quad (f)$$

هو الحل المستقل الثاني للعامل المتكرر (e) :

$$(k+2)z_1^{k+2} - 2z_1(k+1)z_1^{k+1} + z_1^2 k z_1^k = z_1^{k+2}(k+2 - 2k - 2 + k) = 0.$$

وهكذا فإن حدود الحل العام المنبثقة من الجذر الحقيقي المكرر z_1 هي :

$$y_k = (C_1 + C_2 k) z_1^k \quad (g)$$

وكقاعدة عامة . فإن حدود الحل العام المنبثقة من جذر حقيقي متكرر m مرة هي :

$$y_k = (C_1 + C_2 k + C_3 k^2 + \dots + C_m k^{m-1}) z_1^k. \quad (3.13.11)$$

مثلا . المعادلة :

$$y_{k+3} - 8y_{k+2} + 21y_{k+1} - 18y_k = 0 \quad (h)$$

لها معادلة مميزة هي :

$$(z - 2)(z - 3)^2 = 0$$

لذلك فإن : جذورها حقيقية $z_2 = z_3 = 3$, $z_1 = 2$ وحلها العام :

$$y_k = C_1 2^k + (C_2 + C_3 k) 3^k. \quad (i)$$

(ج) عندما يكون للمعادلة المميزة جذران مركبان مترافقان complex conjugate

$$z_1 = \rho e^{i\theta}; \quad z_2 = \rho e^{-i\theta}, \quad (3.13.12)$$

تكون الحدود المناظرة من الحل العام :

$$y_k = \bar{C}_1 (\rho e^{i\theta})^k + \bar{C}_2 (\rho e^{-i\theta})^k = \rho^k (C_1 \cos k\theta + C_2 \sin k\theta), \quad (3.13.13)$$

حيث $C_1, C_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2$ ثوابت اختيارية

كمثال . المعادلة التالية :

$$y_{k+1} - 2y_k + 2y_{k-1} = 0 \quad (j)$$

لها معادلة مميزة

$$z^2 - 2z + 2 = 0,$$

بجذور $z_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2} e^{\pm(\pi/4)i}$ ولذا فحلها العام يكون

$$y_k = 2^{k/2} \left(C_1 \cos k \frac{\pi}{4} + C_2 \sin k \frac{\pi}{4} \right). \quad (k) \quad (3.13.13)$$

(د) عندما يكون للمعادلة المميزة جذور مركبة مترافقة مكررة m مرة ، تصبح الثوابت C_1, C_2 من المعادلة (3.13.13) ، على التوالي ،

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 k + C_3 k^2 + \dots + C_m k^{m-1}; \\ C_{m+1} + C_{m+2} k + C_{m+3} k^2 + \dots + C_{2m} k^{m-1}. \end{aligned} \quad (3.13.14)$$

3. تراكم الخطأ في التكامل خطوة بخطوة :

Accumulation of Error in Step-by-step Integration

تظهر معادلات التكامل في هذا الفصل الخطأ ، المتأصل في استعمالها ، أي الفرق بين الحلين الصحيح والتقريبي لمعادلة تفاضلية الناجم عن خطوة واحدة في عملية الحل العددي ، تسمى هذه الأخطاء عادة أخطاء البتر *truncation errors* ويمكن تخفيفها باستعمال

عدد اكبر من الحدود في مفكوك المشتقات من الفروق المحدودة او بتخفيض الفاصل h . ومن ناحية اخرى فانه لابد من تراكم اخطاء البتر هذه في عمليات الخطوة بخطوة لسببين اولهما كون نقطة البداية في كل خطوة غير دقيقة وثانيهما لان كل خطوة تدخل خطأ اضافيا في العملية .

ان كلا من اخطاء البتر والاطفاء المتراكمة يعتمد على الفاصل h فقط ، حالما تعطي المعادلة التفاضلية ويتم اختيار معادلة التكامل . وسين في هذا القسم ، على مثال ابتدائي ، انه مالم تكن h اصغر من قيمة معينة فان حل المعادلة الفروقية قد يتباعد اكثر فاكثرت حل المعادلة التفاضلية المناظرة أي أن حل المعادلة الفروقية قد يصبح غير مستقر مالم يكن اختيار h لائقا :

تمعن في مسألة الشرط الابتدائي : -

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega^2 y &= 0; \\ y_0 &= 1; \quad \dot{y}_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.14.1)$$

والتي حلها المحكم rigorous solution

$$y = \cos \omega t, \quad (3.14.2)$$

ثم طبق على المعادلة (3.14.1) طريقة نوميروف المعادلة (3.11.2) بضرب

المعادلة (3.14.1) بالكمية h^2 وتعويض y_k عن $(\delta^2 - \delta^4/12)y_k$ ثم التأثير على المعادلة كلها بالمؤثر $(1 + \delta^2/12)$ نحصل عن المعادلة الفروقية

$$\delta^2 y_k + \frac{\omega^2 h^2}{12} (12 + \delta^2) y_k = 0$$

أو

$$y_{k+1} + 2cy_k + y_{k-1} = 0, \quad (3.14.3)$$

حيث :

$$2c = \frac{\frac{5}{6}\omega^2 h^2 - 2}{1 + \frac{1}{12}\omega^2 h^2} \quad (3.14.4)$$

ستؤخذ . بصورة منفصلة . ثلاث حالات في حل المعادلة (3.14.3) بطرق البند

$$c > 1; \quad c = 1; \quad -1 < c < 1. \quad 3.13$$

(أ) عندما تكون $c < 1$ دع

$$c = \cosh \alpha$$

ثم عوض $y_k = z^k$ في المعادلة (3.14.3)

$$[z^2 + 2(\cosh \alpha)z + 1]z^{k-1} = 0.$$

جذور المعادلة المميزة هي

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\cosh \alpha \pm \sqrt{\cosh^2 \alpha - 1} \\ &= -\cosh \alpha \pm \sinh \alpha = \begin{cases} -e^{-\alpha} \\ -e^{\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

ويصبح الحل العام

$$y_k = c_1(-1)^k e^{-\alpha k} + c_2(-1)^k e^{\alpha k}.$$

(b)

وتتطلب الشروط الابتدائية ان يكون :

$$y_0 = c_1 + c_2 = 1$$

() ابدل العداد n بالعداد k لتجنب الالتباس مع الرقم الخيالي .

وكذلك $y_0 \doteq (y_1 - y_{-1})/2h = 0$ أي أن

$$(-c_1 e^{-\alpha} - c_2 e^{\alpha}) - (-c_1 e^{\alpha} - c_2 e^{-\alpha}) = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})(c_1 - c_2) = 0,$$

ومنها $c_2 = c_1 = \frac{1}{2}$ وبذلك يصبح الحل الخاص :

$$y_k = \frac{1}{2}[(-1)^k e^{-\alpha k} + (-1)^k e^{\alpha k}] = (-1)^k \cosh \alpha k. \quad (c)$$

ان هذا الحل ينمو بلا حدود . وبمنوال متذبذب . مع k وبعد بضع خطوات لا يمكن ان يمثل باي درجة من الدقة الحل المثلثي $\cos \omega t$. لذلك عندما تكون $1 < c$ أي بالمعادلة (3.14.4)

$$\omega^2 h^2 > 6 \quad (3.14.5)$$

يصبح حل المعادلة الفروقية غير مستقر.

(ب) عندما تكون $1 = c$ يكون للمعادلة المميزة للمعادلة (3.14.3)

$$z^2 + 2z + 1 = 0,$$

جذر حقيقي مكرر $z_1 = z_2 = -1$ ولذلك . بالمعادلة (3.13.11)

يكون الحل العام

$$y_k = (c_1 + c_2 k)(-1)^k.$$

وتتطلب الشروط الابتدائية ان :

$$y_0 = 1 \quad \therefore \quad c_1 = 1;$$

$$y_1 = y_{-1} \quad \therefore \quad c_1 + c_2 = c_1 - c_2,$$

ومنها $0 = c_2$ وهكذا فان الحل الخاص يعطي بالمعادلة :

$$y_k = (-1)^k = (e^{\pi i})^k = \cos k\pi \quad (d)$$

والتي لها سلوك متذبذب ومدى (سعة) amplitude صحيح .

ولفرض تقويم تردد (frequency) الحل . دع $t = kh$ في المعادلة (d) حتى يكون

$$y_k = \cos \frac{\pi}{h} t = \cos \frac{\pi}{\omega h} \omega t. \quad (e)$$

ان تردد هذا الحل هو $\pi/\omega h$ مرة بقدر التردد ω للحل الصحيح . وحيث ان المعادلة (3.14.4) تعطي لقيمة كلا من $1 = c$ ، $6 = \omega^2 h^2$ ، لذلك فان تردد المعادلة الفروقية هو ($\pi/\sqrt{6} = 1.28$) مرة اكبر من تردد الحل الصحيح ، وبعد فترة قصيرة تخرج المعادلة الفروقية عن الطور .

(ج) عندما تكون $-1 \leq c \leq 1$ د ع

$$c = \cos \alpha \quad (0 < \alpha \leq \pi) \quad (f)$$

بحيث تصبح المعادلة المميزة

$$z^2 + 2 (\cos \alpha) z + 1 = 0,$$

بجدور

$$z_{1,2} = -\cos \alpha \pm i \sin \alpha = \begin{cases} e^{(\pi-\alpha)i} \\ e^{-(\pi-\alpha)i} \end{cases}$$

ولذا يصبح الحل العام للمعادلة :

$$y_k = c_1 e^{k(\pi-\alpha)i} + c_2 e^{-k(\pi-\alpha)i}.$$

وتتطلب الشروط الابتدائية ان يكون :

$$c_1 + c_2 = 1; \quad c_1 - c_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} = c_2 = c_1$$

$$y_k = \frac{1}{2} [e^{k(\pi-\alpha)i} + e^{-k(\pi-\alpha)i}] = \cos k(\pi - \alpha).$$

ان تردد هذا الحل هو $\omega(\pi - \alpha)/\omega h$. يبين الجدول (3.24)

قيم c ، $\omega^2 h^2$ ، $(\pi - \alpha)/\omega h$ المناظرة للقيم المعطاة من α .

جدول (3-24)

α	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
c	1	$\sqrt{2}/2$	0	-0.7071	-1
$\omega^2 h^2$	6	4.77	2.40	0.6161	0
$(\pi - \alpha)/\omega h$	1.28	1.08	1.01	1.0006	1

عندما تكون $-1 = c$ نغطي المعادلة (3.14.4) $0 = h$ ولذلك فإن الحل العددي يقترب في النهاية من الحل الصحيح للمعادلة (3.14.1) وهكذا يظهر ان طريقة نومبروف لن تلتزم على الاطلاق . في هذه المسألة البسيطة . لقيم $6 < \omega^2 h^2$ اي لفترة زمنية

$$h > \frac{\sqrt{6}}{\omega} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi} T = \frac{T}{2.56},$$

حيث T هي دور (period) الحل . وتلتزم (converge) هذه الطريقة لقيم $h < T/2.56$ وتعطي نتائج حسنة عند

$$\omega^2 h^2 < 2.40 = \frac{1.2}{5} \therefore h < 2 \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{T}{\pi} = \frac{T}{4.05}.$$

لذا فان طريقة نومبروف تعطي نتائج جيدة لفترة زمن h أقل من ربع الدور . وحيث ان هذه الطريقة غالبا ما تنطبق في مسائل الاهتزاز المعقدة على بضعة المناويل (modes) الاولى من اهتزاز المنظومة . فانه من المهم ان نتذكر بان الفترة الزمنية يجب ان تكون اصغر من ربع اقصر دورة تؤخذ بنظر الاعتبار . من الممكن الحصول على نتائج مشابهة لمعادلات تفاضلية اكثر تعقيدا ولطرق تكامل اخرى .

مسائل

3.1 جد . بمفكوك متسلسلة تيلر . قيمة تكاملات المسائل التالية عند :

$$0.3 \quad 0.1 \quad 0.1 = x \quad (a) \quad \text{لثلاثة ارقام ذات معنوية}$$

$$1.1, 1.0 = x \quad (b) \quad \text{لاربعة ارقام ذات معنوية}$$

$$y' - 2y = 3e^x; \quad y(0) = 0.$$

الجواب :

$$(a) \quad y(0.1) = 0.348; \quad y(0.2) = 0.811; \quad y(0.3) = 1.415.$$

$$(b) \quad y(1) = 13.91; \quad y(1.1) = 17.87.$$

3.2 جد لاربعة ارقام معنوية . قيمة التكامل في المسألة التالية عند $x = 2.1, 2.2$ بواسطة مفكوك متسلسلة تيلر حول $x = 2$

$$y' + \frac{1}{x} y^2 = 0; \quad y(2) = 1.442.$$

3.3 جد قيم التكاملات في المسائل التالية لارباعه ارقام معنوية عند $x = 0.1, 0.3$ بمتسلسلة تيلر .

(a) $y'' = -xy$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0.5$.
(b) $y'' + yy' = x^2$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

(a) $y(0.1) = 1.050$; $y(0.2) = 1.099$; $y(0.3) = 1.145$.
(b) $y(0.1) = 1.095$; $y(0.2) = 1.180$; $y(0.3) = 1.257$. الجواب

3.4 جد لثلاثة ارقام معنوية . قيمة التكامل في المسألة التالية عند $x = 0.2, 0.4$ بمفكوك متسلسلة تيلر

$$y''y^2 + 1 = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 1.$$

3.5 جد قيمة التكامل في المسألة التالية لارباعه ارقام ذات دلالة معنوية عند $x = 1.1, 1.3$ باستعمال مفكوك متسلسلة تيلر

$$y'' + y^2y' = x^3; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 1.$$

$y(1.1) = 1.100$; $y(1.2) = 1.201$; $y(1.3) = 1.306$. الجواب

3.6 رياضي طوله L (الشكل 3.1) يطلق من السكون من زاوية $\theta_0 = 160^\circ$ ويتذبذب في محيط لزوج معاملته 1.2 ثا^{-1} وحدة كتلية .
احسب θ في الفترة $t = 0.1, 0.2$ بمتسلسلة تيلر .

3.7 جد قيمة التكاملات في المسائل التالية بطريقة اويلر للمنىء - المصحح في النقاط المبينة .

(a) $y' - y = e^x$; $y(0) = 0$; $x = 0.2, 0.4$.
(b) $y' - y^2 = 0$; $y(0) = 1$; $x = 0.1, 0.2$.
(c) $y' - xy = 0$; $y(1) = 1$; $x = 1.1, 1.2$.

(b) $y(0.1) = 1.11$; $y(0.2) = 1.25$. الجواب

3.8 جد قيمة التكاملات في المسائل التالية بطريقة ميلني للمنىء المصحح عند $x = 0.4, 0.5$ اذا كانت قيمها عند النقاط الاربعة $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3$

كما معطاة

- (a) $y' - 4y = 0$; $y_0 = 1$; $y_1 = 1.492$; $y_2 = 2.226$; $y_3 = 3.320$.
 (b) $y' - 2y = 3e^x$; $y_0 = 0$; $y_1 = 0.348$; $y_2 = 0.811$; $y_3 = 1.115$.
 (c) $y' + y = 2e^x$; $y_0 = 2$; $y_1 = 2.616$; $y_2 = 2.040$; $y_3 = 2.090$.
 (a) $y_4 = 4.953$; $y_5 = 7.389$. (c) $y_4 = 2.162$; $y_5 = 2.256$.

3.9 جد لثلاثة ارقام معنوية . قيمة التكامل في المسألة 3.1 عند $x = 0.6, (0.1) 0.4 = x$ باستعمال معادلة ادمز بفروق الى الدرجة الثالثة . استعمل قيم الانطلاق المحسوبة في السؤال 3.1 الجواب
 $y(0.4) = 2.20$; $y(0.5) = 3.20$; $y(0.6) = 4.49$.

3.10 جد لثلاثة ارقام معنوية . قيمة التكاملات التالية عند $x = 1.6, (0.1) 1.0 = x$ باستعمال طريقة ادمز بفروق الى حد الدرجة الثالثة وذلك بعد اطلاق الحل بمتسلسلة تيلر :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}; \quad y(1) = 1.$$

3.11 جد لثلاثة ارقام معنوية . قيمة التكامل في السؤال 3.2 باستعمال طريقة آدامز بفروق الى حد الدرجة الثالثة .

$$y(2.4) = 1.14; y(2.5) = 1.09; y(2.6) = 1.04; y(2.7) = 1.00; y(2.8) = 0.97.$$

الجواب

3.12 جد لاربعة ارقام ذات دلالة . قيمة التكامل التالي عند $x = 0.6, (0.1) 0 = x$ باستعمال طريقة آدامز بفروق الى الدرجة الثالثة وذلك بعد اطلاق الحل بمتسلسلة تيلر :

$$y' + y^2 = e^x; \quad y(0) = 1.$$

3.13 جسم محكم سرعته النهائية 500 قد / ثا عندما يسقط حرا في الهواء . احسب سرعته بدلالة الزمن في الفترة $t = 0$ الى $t = 6$ ثانية باستعمال طريقة آدامز بفروق من الدرجة الثانية اذا كانت $v_0 = 200$ قد / ثا وافترض مقاومة الهواء طردية التناسب مع v^2 . ملاحظة : ان معادلة الحركة $m\ddot{x} + \mu\dot{x}^2 = mg$ حيث m هي الكتلة وتذكر السرعة النهائية عندما تكون $\dot{x} = 0$ ثابتا :

$$(\dot{x})_t = \sqrt{mg/\mu}.$$

t	0	1	2	3	4	5	6
v	200	226	251	274	296	316	334

الجواب

3.11 اسقط جسم من طائرة بواسطة مظلة . سرعته النهائية هي 30 قد / ثا . احسب سرعته في الفترة $t = 0$ (0.1) 0.5 ثا . مفترضا $v_0 = 20$ قد / ثا ومقاومة الهواء طردية تناسب مع $v^{3/2}$.
استعمل طريقة آدامز بفروق من الدرجة الاولى .

3.15 حقل دائرة التواز لمحرك d-c محاثته (inductance) $L = 200$ هنري ومربوط بالتسلسل مع المقاومة R . تردداد المقاومة طفيفا مع التيار ويمكن التعبير عنها $R = R_0 + ri$ حيث i هو التيار المتدفق (امبير) عبر R , $R_0 = 100$ أوم . $r = 10$ أوم / امبير . عرضت الدائرة الى جهد ثابت E مقداره 120 فولت باغلاق مفتاح . جد التيار $i(t)$.
ادامز في الفترة $t = 0$ (0.5) 2.5 ثا وقارن النتيجة بدائرة خطية linear circuit ذات مقاومة $R = 106$ أوم اذا كان $i(0) = 1.2$ امبير .

t	1.5	2.0	2.5
i	1.129	1.117	1.108

الجواب

3.16 قيم لثلاثة ارقام معنوية التقريب الاول لتكامل المسألة التالية عند $x = 1.1$ (0.1) 1.3 باستعمال طريقة اويلر - فوكس .

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}; \quad y(1) = 1.$$

$$y(1.1) = 0.996; y(1.2) = 0.986; y(1.3) = 0.971.$$

الجواب

3.17 قيم لثلاث ارقام معنوية التقريبين الاول والثاني لتكامل المسألة التالية عند $x = 0.1$ (0.1) 0.4 باستعمال طريقة اويلر - فوكس مع تصحيح الخطأ .

$$y' - 2y = 3e^x; \quad y(0) = 0.$$

3.18 قيم لثلاثة ارقام معنوية التقريبين الاول والثاني لتكامل المسألة التالية عند $x = 1.1$ (0.1) 1.3,

باستعمال طريقة اويلر - فوكس مع تصحيح الأخطاء .

$$y' - x^2y = x^2; \quad y(1) = 1.$$

$$y(1.1) = 1.24; y(1.2) = 1.58; y(1.3) = 2.10.$$

الجواب

3.19 جد معادلات الموازنة من نمط اويلر-فوكس (انظر القسمين ، 3.6 ، 3.7 لحل

المعادلتين الآتيتين :

$$y' = y + z; \quad z' = z - y;$$

$$y_0 = 0.1; \quad z_0 = 0.2.$$

ثم استخدمها لتقييم $z(x), y(x)$ في الفترة $x = 0.3(0.1)0$ مع أهمل التصحيح.

الجواب

$$y_1 = 0.1326; \quad y_2 = 0.1696, \quad y_3 = 0.2112; \quad z_1 = 0.2088, \quad z_2 = 0.2149, \\ z_3 = 0.2176.$$

3.20 قيم لثلاثة ارقام معنوية بطريقة آدامز في الفترة $x = 0.4(0.1)0$ الدالتين $z(x), y(x)$

اللتين توفيان المعادلات والشروط التالية .

اطلق الحل بمتسلسلة تيلر واستعمل فروقا الى حد الدرجة الثانية .

$$(a) \quad y' = 2z^2 - y, \quad y(0) = 1; \quad z' = zy, \quad z(0) = 1.$$

$$(b) \quad y' = z - y^2, \quad y(0) = 1; \quad z' = zy, \quad z(0) = 1.$$

الجواب

$$(a) \quad y(0.3) = 1.492, \quad y(0.4) = 1.803; \quad z(0.3) = 1.434, \quad z(0.4) = 1.683.$$

$$(b) \quad y(0.3) = 1.041, \quad y(0.4) = 1.072; \quad z(0.3) = 1.355, \quad z(0.4) = 1.506.$$

3.21 قيم بطريقة منبىء - مصحح ميلني تكاملات المسائل التالية عند $x = 1.0, 0.8$ اذا

كانت قيمها وقيم مشتقاتها الاولى عند $x = 10, 0.2, 0.4, 0.6$. كما معطاة .

$$(a) \quad y'' + y = 0; \quad y_0 = 1.00; \quad y_1 = 0.930; \quad y_2 = 0.921; \quad y_3 = 0.825.$$

$$y'_0 = 0; \quad y'_1 = -0.199; \quad y'_2 = +0.389; \quad y'_3 = -0.565.$$

$$(b) \quad y'' - y = 0; \quad y_0 = 0; \quad y_1 = 0.201; \quad y_2 = 0.411; \quad y_3 = 0.637; \quad y'_0 = 1;$$

$$y'_1 = 1.020; \quad y'_2 = 1.081; \quad y'_3 = 1.185.$$

$$(b) \quad y_4 = 0.8882; \quad y_5 = 1.176.$$

الجواب

3.22 قيم بطريقة منبىء مصحح ميلني تكاملات المسائل التالية عند $x = 0.5, 0.4$ بعد

الحصول على قيمها وقيم مشتقاتها الاولى عند $x = 0.1, 0.2, 0.3$ بمتسلسلة تيلر.

(a) $y'' - y^2 = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$

(b) $y'' - xy = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$

(b) $y_4 = 1.413; \quad y_5 = 1.526.$

الجواب

3.23 قيم لاربعة ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 1.0 \quad 0.1 \quad 1.5$ باستعمال

طريقة آدامز - شتورمر بفروق الى حد الدرجة الثانية .

اطلق الحل بمتسلسلة تيلر .

$$y'' + 3xy' + x^2y = e^x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

3.24 قيم لثلاث ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0 \quad 0.2 \quad 1.0$ باستعمال طريقة

آدامز - شتورمر بفروق الى حد الدرجة الثانية بعد اطلاق الحل بمتسلسلة تيلر.

$$xy'' + y' + xy = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

$$y(0.6) = 0.912; \quad y(0.8) = 0.847; \quad y(1.0) = 0.766.$$

الجواب

3.25 قيم لاربعة ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0 \quad 0.1 \quad 0.6$ باستعمال

طريقة آدامز - شتورمر بفروق الى حد الدرجة الثانية . اطلق الحل بمتسلسلة تيلر.

$$y'' + yy' = x^2; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

3.26 قيم لاربعة ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 1.0 \quad 0.1 \quad 1.5$ باستعمال

طريقة آدامز - شتورمر بفروق الى حد الدرجة الثانية . اطلق الحل بمتسلسلة تيلر.

$$y'' + y^2y' = x^3; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 1.$$

$$y(1.3) = 1.3053; \quad y(1.4) = 1.4132; \quad y(1.5) = 1.5266.$$

الجواب

3.27 قيم لاربعة ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0 \quad 0.1 \quad 0.5$ بعد اطلاق

الحل بمتسلسلة تيلر.

$$y'' + 2xy = 3x^3 + 1; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

(a) استعمل طريقة آدامز - شتورمر العامة بفروق من الدرجة الثانية.

(b) استعمل معادلة تواتر آدامز - شتورمر النافذة عند غياب y'

3.28 قيم لاربعة ارقام ذات دلالة مكاملة المسألة التالية عند $x = 0.5(0.1) 0$

$$y'' + x^2 y = 3e^x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

(a) استعمل طريقة ادامز - شتورمر العامة بفروق من الدرجة الثانية.

(b) استعمل معادلة تواتر ادامز - شتورمر النافذة عند غياب y' . أطلق الحل بمتسلسلة تيلر.

$$(a) \quad y(0.3) = 1.1488; \quad y(0.4) = 1.2730; \quad y(0.5) = 1.4400.$$

الجواب

$$(b) \quad y(0.3) = 1.1489; \quad y(0.4) = 1.2731; \quad y(0.5) = 1.4400.$$

3.29 ضغطت كرة مرنة كتلتها 1 قليلا على جسم صلد مسطح ثم اطلقت حيا السكون عند

$t = 0$ عبر عن ازاحة نقطة على الكرة بعيدا عن نقطة التماس (المسماة المقترَب α)

بدلالة الزمن t وبواسطة متسلسلة تيلر . ان المعادلة التفاضلية لحركة الكرة هي

$$m\ddot{\alpha} + k\alpha^{3/2} = 0$$

حيث تمثل k ثابت مرونة الكرة . وتتطلب الشروط الابتدائية .

$$\alpha(0) = \alpha_0; \quad \dot{\alpha}(0) = 0.$$

قيم α عند $t = 0.1$ و $t = 0.2$ بمفكوك متسلسلة تيلر ثم مدد الحل الى $t = 0.5$ بمعادلة ادامز - شتورمر مفترضا $k = 10$ و $\alpha_0 = 1$.

3.30 اطلق صاروخ كتلته M عموديا من سطح الارض ($x = R$) بسرعة ابتدائية

V_0 . حدد بطريقة ادامز - شتورمر وفروق من الدرجة الاولى قيمة x لقيم $t = 0$ و $t = 6$

مفترضا كون مقاومة الهواء طردية التناسب مع السرعة وجاذبية الارض عكسية التناسب مع x^2 اذا كانت :

$$R = 10; \quad V_0 = 5; \quad \mu = 0.1; \quad k = 1,$$

في نظام وحدات متوائم حيث M معامل مقاومة الهواء لوحده كتلة و k ثابت الجاذبية.

ملاحظة : ان المعادلة التي تحكم الازاحة هي $M\ddot{x} + \mu M\dot{x} + Mk/x^2 = 0$

t	0	1	2	3	4	5	6
x	10.00	14.75	19.03	22.90	26.41	29.58	32.45

الجواب

(*) انظر تيموشكو وكودير . نظرية المرونة . شركة مكرو - هيل . نيويورك 1951 ص 372 ومايلها .

(**) انظر مثلا المعادلات التفاضلية الجزء 9.2

3.31 مدد حل المسألة 3.6 الى الفترة 0.2 (0.1) 0.5 بطريقة آدامز - شتورمر وباستعمال فروق من الدرجة الثانية.

3.32 يتذبذب جسم كتلته M حراً على منزلق أفقي عديم الاحتكاك تحت تأثير لولب غير خطي ، معادلته تساوي $k_0 + rx^2$ يمر الجسم في نقطة الأصل $x = 0$ بسرعة مقدارها v_0 ، جد قيمة x عند $t = 0.5$) 3 بطريقة آدامز - شتورمر وباستعمال فروق من الدرجة الثانية وذلك للقيم التالية للثوابت في نظام متوالم للوحدات :

$$M = 1; \quad k_0 = 1; \quad r = \frac{1}{2};$$

ملاحظة :

ان المعادلة التي تحكم الحركة هي $M\ddot{x} + (k_0 + rx^2)x = 0$.*

الجواب

t	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
x	0	0.478	0.823	0.892	0.658	0.236	-0.244

3.33 يتذبذب الجسم في السؤال 3.32 تحت تأثير لولب معادلته $k_0 - rx^2$ حيث $k_0 = 1$ ، $r = \frac{1}{2}$ ويبدأ التذبذب عند $x = 1$ بسرعة صفر . حدد قيمة x في الفترة $t = 0$ (1) 4 بطريقة آدامز - شتورمر وفروق من الدرجة الثانية .

3.34 ان معادلة حركة الكترون موضوع في مجال كهربائي ستاتيكي والتي تعزى الى سلك موجب مشحون الى مالانهاية هي**

$$m\ddot{x} + \frac{k}{x} = 0,$$

حيث x هي بعد الالكترون عن السلك . اذا كانت $k/m = 2$ وانطلق الالكترون من السكون على بعد ثمان وحدات من السلك عند $t = 0$ حدد x لقيم $t = 0$ (2) 10 بمعادلة تواتر آدامز - شتورمر وباستعمال فروق من الدرجة الثانية .

ملاحظة : افترض ان الالكترون يمكنه عبور السلك من خلال فجوة متناهية .

(*) انظر مثلاً . المعادلات التفاضلية . الجزء 9.8 .

(**) انظر . مثلاً . المعادلات التفاضلية . الجزء 7.5 .

الجواب

t	0	2	4	6	8	10
x	8.000	7.496	5.943	3.026	-2.620	-4.630

3.35 قيم لثلاث ارقام معنوية التقريبين الاول والثاني لتكامل المسألة التالية عند $0 = x$ باستعمال طريقة فوكس والحددين الاولين من مفكوك الخطأ

$$xy'' + y' + xy = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

الجواب : $y(0.4) = 0.960; y(0.6) = 0.912; y(0.8) = 0.847; y(1.0) = 0.766.$

3.36 قيم لاربعة ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $0 = x$ باستعمال طريقة فوكس .

$$y'' + 3xy' + x^2y = e^x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

3.37 (قيم لثلاث ارقام معنوية التقريبين الاول والثاني لتكامل المسألة التالية عند $x = 0(0.4)2.0$ باستعمال طريقة فوكس والحددين الاولين من مفكوك الخطأ .

$$xy'' + y' + xy = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

الجواب : $y(0.8) = 0.846; y(1.2) = 0.671; y(1.6) = 0.456; y(2.0) = 0.224.$

3.38 (قيم لثلاث ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0(0.1)0.5$ وباستعمال معادلة تواتر نومبروف .

$$y'' + x^2y = 3e^x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

قيم $y(0.1)$ بمسلسلة تيلر .

3.39 (قيم لاربعة ارقام معنوية تكامل المسألة التالية عند $x = 0(0.1)0.5$ بعادلة تواتر نومبروف .

$$y'' + 2xy = 3x^3 + 1; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

الجواب

Taylor series: $y(0) = 1; y(0.1) = 1.105; y(0.2) = 1.217; y(0.3) = 1.335; y(0.4) = 1.456; y(0.5) = 1.577.$

3.40 (رقااص رياضي طولله L (الشكل 3.1) يمر بالاصل $\theta = 0$ عند $t = 0$ بسرعة زاوية $\theta = 1$ زاوية نصف قطرية / ثا . بافتراض الانحراف صغيراً . حدد قيم θ في الفترة $0(0.1)0.5$

بمعادلة تواتر نوميروف مفترضا $q/L = 20$ نا
(a) جد θ عند $t = 0.1$ ، $t = 0.2$ بتقريب $\theta_0 \left(\delta - \frac{\delta^3}{6} \right)$

وتطبيق المعادلة الفروقية عند $t = -0.1$ ، $t = 0$ ، $t = 0.1$

(b) جد θ عند $t = 0.1$ بمتسلسلة تيلر .

3.41 يتذبذب رقاص المسألة 3.40 في محيط لرج فيه $\mu = 1.2$ لوحدة الكتلة . جد

قيم θ في الفترة $0(0.1)0.5$ بطريقة فوكس .

ملاحظة : جد قيمة θ عند $t = 0.1$ بمتسلسلة تيلر .

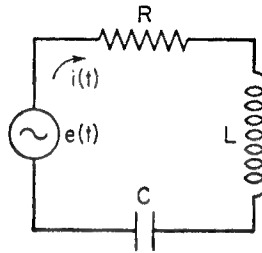
الجواب

t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
θ	0.091	0.155	0.182	0.171	0.130	0.068

3.42 دائرة $R-L-C$ المربوطة بالتسلسل في الشكل 3.5 تحتوي على محاثّة $L = 0.1$

هنرى وسعة $C = 0.05$ ميكروفاراد ($0.05 \cdot 10^{-6}$ farad)

ومقاومة $R = 5000$ أوم . ربطت عناصر الدائرة بالتسلسل مع بطارية ذات 22.5



شكل (3-5)

فولت ومفتاح . لا توجد شحنة ابتدائية q في المكثف ولا يتدفق تيار في الدائرة عند $t = 0$.

(a) جد الشحنة q بعد اغلاق المفتاح بطريقة فوكس في الفترة $t = 0(0.01)0.04$.

(b) جد الشحنة في نفس الدائرة اذا كانت $R = 0$.

(c) جد الشحنة في نفس الدائرة اذا كانت $R = 2000$ أوم وكان هناك تيار ابتدائي مقداره 5

ميلي امبير يتدفق بنفس اتجاه فولتية البطارية .

ملاحظة : ان معادلة الدائرة الكهربائية التفاضلية هي :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + (1/C)q = e,$$

حيث e هي فولتية البطارية ، ان التيار i هو مشتقة الشحنة q بالنسبة للزمن .

الجواب

$10^3 t$	1	2	3	4
q	0.0112	0.0439	0.0998	0.1753

3.43 قيم بطريقة نوميروف العامة تكامل المعادلة التالية عند $x = 0.1(0.1)0.4$

$$y^{(4)} - (1-x)y = 0; \quad y_0 = 1; \quad y'_0 = 0; \quad y''_0 = 1; \quad y'''_0 = 0.$$

الجواب

$$y(0.1) = 1.005; \quad y(0.2) = 1.020; \quad y(0.3) = 1.046; \quad y(0.4) = 1.082.$$

3.44 اشتق معادلة تواتر من مرتبة h^{10} لتكامل المسألة التالية :

$$y'' + c^2 y = 0; \quad y_0 = 0; \quad y'_0 = 1.$$

3.45 قيم القيمة المميزة الاولى للمسألة التالية بالتكامل 'اللامامي مستعملا $h = 0.1, h = 0.2$

ومفترضاً ان k^2 طردية التناسب مع $1/L^2$

$$(a) \quad y'' + k^2(x/L)^2 y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y(L) = 0.$$

$$(b) \quad y'' + k^2(1 - x/L)y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y(L) = 0.$$

الجواب

$$(a) \quad k_1 = 5.52.$$

3.46 برهن على ان تكامل المعادلة

$$y'' + \omega^2 y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0,$$

خطوة فخطوة المقتنى بتعويض $\delta^2 y$ بدلا عن $h^2 y''$ يقود الى حد متذبذب بتردد يساوي 1.11ω

عندما تكون فترة الزمن $h = T/4.44$ حيث $T = 2\pi/\omega$ هي دورة (period) الحل الصحيح ،

وعلى ان الحل يتباعد لقيم $h > T/\pi$

الفصل الرابع

التكامل العددي الى مسائل القيم الحدودية العادية

The Numerical Integration of Ordinary Boundary Value Problems

4.1 (مسائل القيم الحدودية

Boundary Value Problems

ان حل مسائل القيم الحدودية بواسطة الفروق المحدودة يحول تكامل المعادلة التفاضلية الى عملية استخراج جذور مجموعة من المعادلات الجبرية الآتية. ان هذه الجذور ماهي الا قيم الحل المطلوب عند نقاط الارتكاز لمجال التعريف الذي هو احادي البعد بالنسبة للمعادلات التفاضلية العادية.

ان المسائل الحارة على معادلات تفاضلية عادية من المرتبة الاولى هي بالضرورة من النمط ذي القيمة الاولى غير ان القيم الحدودية تؤول الى معادلات من المرتبة الثانية او من مرتبات اعلى والفردية المرتبة من هذه المعادلات التي تحتوي على شروط اولية مختلفة العدد عند نهايتي الفترة ، صعبة الحل عدديا احيانا والمعتاد ان تحول الى معادلات زوجية المرتبة (even-order). وذلك اما بواسطة التكامل او بالتفاضل .

متى كان ذلك ممكنا فان المشتقات في المعادلة التفاضلية تفك بدلالة الفروق المركزية حيث ان دقة المفكوكات هي اعظم من الدقة التي نحصل عليها من الفروق الجانبية .

ان المشتقات الموجودة في الشروط الحدودية للمسألة قد يعبر عنها بدلالة الفروق الجانبية أو الفروق المركزية ، وكمثال ذلك فان الشروط الحدودية التالية عند نقطة الاصل قد حولت بموجب المعادلة (2.7.16) الى شروط الفروق المركزية المناظرة لها وذلك باستعمال الحد الاول من مفكوكاتها.

$$\begin{aligned}y(0) &= 0; & y_0 &= 0; \\y'(0) &= 0; & y_1 - y_{-1} &= 0; \\y''(0) &= 0; & y_1 - 2y_0 + y_{-1} &= 0; \\y'''(0) &= 0; & y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2} &= 0; \\y^{iv}(0) &= 0; & y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2} &= 0.\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

ان هذه المعادلات تستعمل فعلا لتعريف قيم y_{-2}, y_{-1} اللتين تقعان خارج فترة تعريف y ، بدلالة y_0, y_1, y_2 والتي لها خطأ ذو مرتبة h^2

وعندما نستعمل الفروق المركزية التي مرتبتها h^2 في المعادلات ونستعمل الفروق الامامية او الخلفية في الشروط الحدودية الاولى فان هذه الاخيرة ينبغي ايضا أن تكون مرتبة خطئها h^2 كلما كان ذلك ممكنا ، ولذلك فان الشروط الواردة ، في المعادلة (4.1.1) مثلا يجب ان يعبر عنها بدلالة مؤشرات الفروق للشكل (2.5b) :

$$\begin{aligned} y(0) &= 0; & y_0 &= 0; \\ y'(0) &= 0; & -y_2 + 4y_1 - 3y_0 &= 0; \\ y''(0) &= 0; & -y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0 &= 0; \\ y'''(0) &= 0; & -3y_4 + 14y_3 - 24y_2 + 18y_1 - 5y_0 &= 0; \\ y^{iv}(0) &= 0; & -2y_5 + 11y_4 - 24y_3 + 26y_2 - 14y_1 + 3y_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

4. التكامل خطوة فخطوة لمسائل القيم الحدودية

Step-by-step integration of Boundary Value Problems

من الممكن حل مسائل القيم الحدودية العادية من المرتبة الثانية باساليب الفصل الثالث أي بموجب قوانين التكامل الامامي بالاقتران مع المحاولة والخطأ او بالاساليب الاستكمال لتأخذ مثلا المسألة البسيطة التالية :

$$y'' + y^2 = 0; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = 0. \quad (a)$$

فبضرب المعادلة في h^2 وباستعمال الفروق المركزية نحصل على معادلة المواورة recurrence equation التالية :

$$y_{i+1} = 2y_i - h^2 y_i^2 - y_{i-1}, \quad (b)$$

التي تصبح على الصورة التالية عندما $h = \frac{1}{4}$

$$y_{i+1} = 2y_i - \left(\frac{y_i}{4}\right)^2 - y_{i-1}. \quad (c)$$

ولكي نبدأ بالحل ، افرض ان قيمة $y_1 = 1.5$ ثم كامل مكاملة امامية كما هو مبين في العمود الثالث من الجدول 4.1. وعندما تكون $y_1 = 2.0$ نحصل على النتائج الواردة في العمود الرابع من الجدول 4.1

جدول (٤-١)

i	x_i	y_i			
		$y_1 = 1.5$	$y_1 = 2.0$	$y_1 = 1.70$	$y_1 = 1.6825$
0	0	2.00	2.00	2.00	2.0000
1	0.25	1.50	2.00	1.70	1.6825
2	0.50	0.86	1.75	1.22	1.1881
3	0.75	0.17	1.31	0.65	0.6055
4	1.00	-0.52	0.76	0.05	0.0000

وباجراء الاستكمال الخطي بين $y_4 = -0.52$, $y_1 = 1.5$ وبين $y_4 = 0.76$, $y_1 = 2.0$ نحصل على [بالمعادلة (1.2.7)]

$$y_1 = \frac{1.5 \times 0.76 - 2.0 \times (-0.52)}{0.76 - (-0.52)} = 1.70$$

وعندما $y_1 = 1.70$ فإن المعادلة (c) تعطينا النتائج الواردة في العمود الخامس من الجدول 4.1. وباجراء الاستكمال بين 1.70, 1.5 ينتج :

$$y_1 = \frac{1.5 \times 0.05 - 1.70(-0.52)}{0.05 - (-0.52)} = 1.6825$$

وعندما $y_1 = 1.6825$ فإن y_i في العمود السادس من الجدول 4.1 تمثل الجواب الصحيح عندما $n = 4$

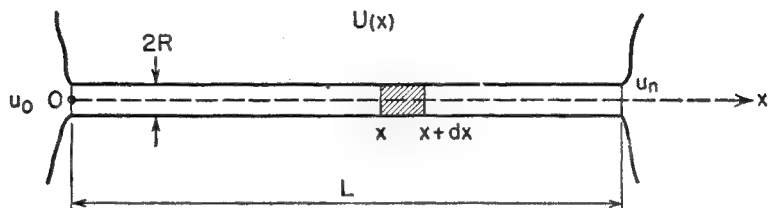
ويمكن استعمال اساليب مماثلة لحل المعادلات ذات المرتبات العالية حيث نستعمل كوسطاء parameters في هذه الحالة بعض القيم الاولى من y_i ثم نحسب الاخطاء في الشروط الحدودية عند نهاية مجال التكامل. وان هذه الطريقة تصبح مرهقة حالما تصبح مرتبة المعادلة اكبر من الثالثة او الرابعة.

4.3 حل المسائل من المرتبة الثانية بواسطة الفروق المركزية

Solution of Second-order Problems by Central Differences

لكي نوضح الطريقة العامة لحل مسائل القيم الحدودية الاعتيادية بموجب الفروق المركزية فاننا سناخذ مسألة انتقال الحرارة التي تتناول تعيين درجة الحرارة u لسلك دائري المقطع طوله (L) ونصف قطره R يربط جسمان درجة حرارتهما u_n, u_0 على

التوالي تبقى ثابتة . ويفقد حرارة الى الوسط المحيط الذي درجة حرارته $U(x)$ (شكل 4.1)



شكل (4-1)

وبمساواة الحرارة الداخلة في عنصر طوله dx من السلك مع الحرارة التي تترك سطحه نجد ان المسألة الحدودية هنا تؤول الى :

$$u'' - \frac{2k_1}{kR} u = - \frac{2k_1}{kR} U; \quad u(0) = u_0; \quad u(L) = u_n, \quad (4.3.1)$$

حيث k = التوصيل الحراري للسلك

k_1 = التوصيل الحدودي للسلك

محور السلك حيث تقع نقطة الاصل عند نهايته اليسرى $x =$

ولاجل تحويل هذه المسألة الى صيغة لا بعدية nondimensional اجعل

$$z = \frac{x}{L}; \quad v(z) = \frac{u(x)}{u_n}; \quad F(z) = \frac{U(x)}{U(0)},$$

وبذلك نحصل على

$$v'' - \frac{2k_1 L^2}{kR} v = - \frac{2k_1 L^2}{kR} \frac{U(0)}{u_n} F(z); \quad (4.3.2)$$

$$v(0) = \frac{u_0}{u_n}; \quad v(1) = 1,$$

علما بان الفتحاحات (primes) اعلاه تدل على التفاضل بالنسبة الى z وفي حالة خاصة سوف نفترض بان :

$$L = 100 \text{ cm}; \quad R = 1 \text{ cm};$$

$$k = 1 \text{ cal/sec } ^\circ\text{C cm}^2/\text{cm};$$

$$k_1 = 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{3}{2} z + \frac{1}{3} \right) \text{ cal/sec } ^\circ\text{C cm}^{2*};$$

$$u_0 = 0; \quad U(0)/u_n = 1;$$

$$F(z) = e^z,$$

بحيث تؤول مسألة القيم الحدودية [المعادلات (4.3.2)] الى

$$v'' - 2(9z + 2)v = -2(9z + 2)e^z; \quad (4.3.3)$$

$$v(0) = 0; \quad v(1) = 1.$$

ولكي نحول المعادلات (4.3.3) الى مسألة الفروق المناظرة فأنا نجزم فترة تعريف المتغير $z \in [0, 1]$ الى اجزاء متساوية عددها n طول الجزء الواحد $1/n = h$ ، ثم نضرب المعادلة التفاضلية في h^2 ومن ثم نعوض ($\delta^2 v + \epsilon_2$) عن $h^2 v''$ وفقا الى المعادلة (2.7.16) وهكذا تصبح المعادلة على الصورة التالية :

$$v_i - 2v_i + v_r + \epsilon_{2i} - 2h^2(9z_i + 2)v_i = -2h^2(9z_i + 2)e^{z_i}$$

$$v_i - c_{hi}v_i + v_r = -(c_{hi} - 2)e^{z_i} - \epsilon_{2i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (4.3.4)$$

حيث ان :

$$c_{hi} = 2[1 + h^2(9z_i + 2)]. \quad (4.3.5)$$

والشروط الحدودية في هذه الحالة هي

$$v_0 = 0; \quad v_n = 1. \quad (4.3.6)$$

ان المعادلة (4.3.4) تصدق وتطبق عند $(n-1)$ من نقاط الارتكاز الداخلية أي ان $i = 1, 2, \dots, n-1$ وهذه تقود الى مجموعة $(n-1)$ من المعادلات الجبرية الخطية في $(n-1)$ من قيم الارتكاز المجهولة v_i . عند حل هذه المنظومة تصبح قيمة v معلومة. كما هو مطلوب ، عند $(n+1)$ من نقاط الارتكاز v_i ($i = 0, 1, \dots, n$) وزيادة تجزئة الفترة، أي بزيادة الفترات . فان دقة الحل تتحسن بغير حدود ، نظريا على الاقل .

(*) التوصيل الحراري k_1 يتغير خطيا بين درجة الصفر و 500 بالنسبة للتقريب الأول

سنحل المسألة المثلة بالمعادلات (4.3.4) و (4.3.6') الان باستعمال $n = 2, 3, 4$ على التوالي : أي لقيم h المتناقصة وسوف يهمل التصحيح ϵ_{2i} في الاول. التقريب عندما $n = 2$ تطبق المعادلة (4.3.4) عند $z_1 = \frac{1}{2}$ (شكل 4.2a)

$$v_0 = v_1 = 0; \quad v_n = v_r = v_2 = 1;$$

$$h = \frac{1}{2}; \quad c_{h1} = 2[1 + \frac{1}{4}(9 \cdot 0.5 + 2)] = 5.25,$$

وهذه تعطي.

$$0 - 5.25v_1 + 1 = -3.25e^{0.5} = -5.359; \quad (4.3.7)$$

$$v(\frac{1}{2}) = v_1^{(1)} = 1.211.$$

التقريب عندما $n = 3$ تطبق المعادلة (4.3.4) عند $z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = \frac{2}{3}$ (شكل 4.2b) حيث

$$v_0 = 0; \quad v_n = v_3 = 1;$$

$$h = \frac{1}{3}; \quad c_{hi} = 2[1 + \frac{1}{9}(9z_i + 2)],$$

وهذه تعطي

$$z_1 = \frac{1}{3} \text{ في } 0 - 3.1111v_1 + v_2 = -1.1111e^{1/3} = -1.5507;$$

$$z_2 = \frac{2}{3} \text{ في } v_1 - 3.7778v_2 + 1 = -1.7778e^{2/3} = -3.4628;$$

$$v(\frac{1}{3}) = v_1^{(1)} = 0.9599; \quad v(\frac{2}{3}) = v_2^{(1)} = 1.4354.$$

التقريب عندما $n = 4$ تطبق المعادلات (4.3.4) عند $z_1 = \frac{1}{4}, z_2 = \frac{1}{2}, z_3 = \frac{3}{4}$ (شكل 4.2c) حيث

$$v_0 = 0; \quad v_n = v_4 = 1;$$

$$h = \frac{1}{4}; \quad c_{hi} = 2[1 + \frac{1}{16}(9z_i + 2)],$$

وهذه تعطي :

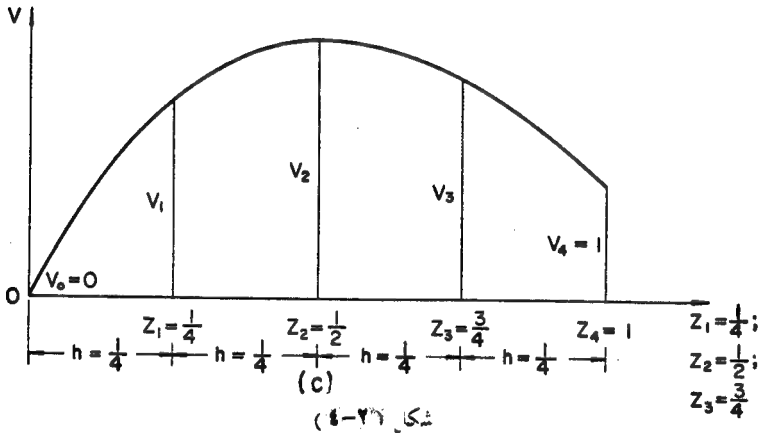
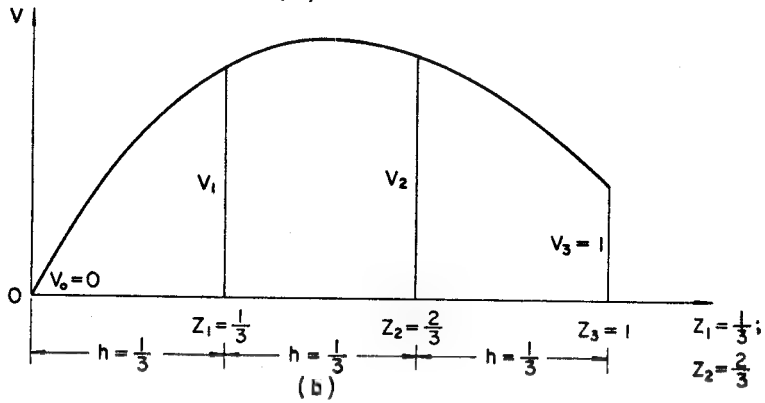
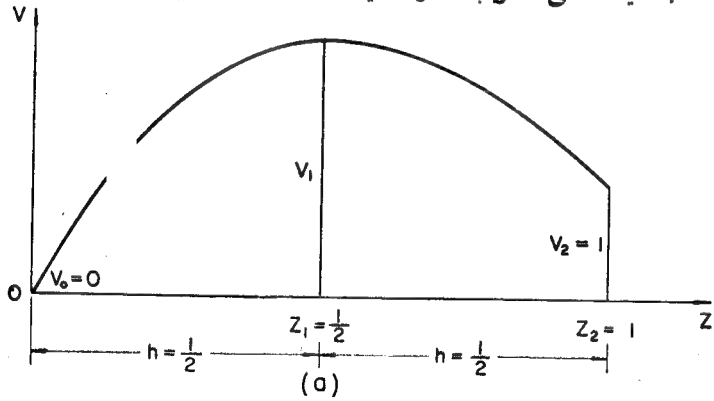
$$z_1 = \frac{1}{4} \text{ في } -2.5312v_1 + v_2 = -0.6821;$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \text{ في } v_1 - 2.8125v_2 + v_3 = -1.3396; \quad (4.3.8)$$

$$z_3 = \frac{3}{4} \text{ في } v_2 - 3.0938v_3 = -3.3156.$$

ان المعادلة (4.3.8) يمكن حلها بأية طريقة من الطرق التي وردت في الفصل الاول
 مثال ذلك : ان حل هذه المنظومة بالارضاء كان الذي ادرج بالجدول 1.15 وهو
 $v_1^{(1)} = 0.7753; \quad v_2^{(1)} = 1.2802; \quad v_3^{(1)} = 1.4855, \quad (4.3.9)$

وان رسمه $v_i^{(1)}$ يدل على التقريب الاول حيث اهملت التصحيحات ϵ .



شكل (٤-٢٦)

جدول (٢-٤)

n	1	2	3	4
v_1	0.6646	0.6915	0.7539	0.7699
v_2	1.0682	1.2260	1.2664	1.2767
v_3	1.4169	1.4680	1.4810	1.4843
n	5	6	7	8
v_1	0.7739	0.7750	0.7752	0.7753
v_2	1.2793	1.2800	1.2802	1.2802
v_3	1.4852	1.4854	1.4855	1.4855

والحل نفسه نحصل عليه بطريقة المعاودة *iteration* كما في الجدول 4.2 مبتدئين بالقيم $v_2^{(0)} = 1, v_3^{(0)} = 1$

الجدول 4.3 يقدم حل المنظومة (4.3.8) مرة اخرى بموجب طريقة كولسكي Cholesky وزيادة عدد نقاط الارتكاز فان خط $v(z)$ البياني يمكن الحصول عليه لاي درجة من الدقة على حساب الجهد الاضافي

جدول (٣-٤)

	v_1	v_2	v_3	c	1	2	3	v_1	v_2	v_3	k
1	2.5312	-1	0	0.6821	2.5312	0	0	1	-0.3951	0	0.2695
2	-1	2.8125	-1	1.3396	-1	2.4174	0	0	1	-0.4137	0.6656
3	0	-1	3.0938	3.3156	0	-1	2.6801	0	0	1	1.4855

$$v_3 = 1.4855; \quad v_2 = 0.6656 + 0.4137 \cdot 1.4855 = 1.2802;$$

$$v_1 = 0.2695 + 0.3951 \cdot 1.2802 = 0.7753$$

انه يمكن زيادة دقة $v(z)$ بجهد اضافي بسيط وذلك باستعمال تصحيحات فوكس corrections او بالاستيفاء extrapolation كما سنوضحه فيما بعد.

4.4 (تحسين الحل باستخدام التصحيحات

Improvement of Solution by Corrections

(a) نهج كاوس GAUSS'S SCHEME

المعادلات (4.3.8) قد حلت بموجب نهج كاوس في الخمسة اعمدة الاولى من الجدول (4.4) وجذورها $v^{(1)}$ التي ظهرت في السطر الاول من الجزء الاسفل من الجدول تطابق (ضمن وحدة واحدة في الرقم الاخير المعنوي) الجذور المحسوبة بالارحاء . وبالمعادلة . ونهج كولسكي .

جدول (4-4)

Rows	v_1	v_2	v_3	c	$c - \epsilon'_2$	$c - \epsilon''_2$	التوضيحات
1	-2.5312	1	0	-0.6821	-0.7122	-0.7130	I
2	1	-2.8125	1	-1.3396	-1.3697	-1.3705	II
3	0	1	-3.0938	-3.3156	-3.3457	-3.3465	III
4	2.5312	-7.1190	2.5312	-3.3908	-3.4670	-3.4690	$2.5312 \times (2)$
5		-6.1190	2.5312	-4.0729	-4.1792	-4.1820	$(1) + (4)$
6		6.1190	-18.9310	-20.2882	-20.4723	-20.4772	$6.1190 \times (3)$
7			-16.3998	-24.3611	-24.6515	-24.6592	$(5) + (6)$

لاجل	من السطر السابع	من السطر الثالث	من السطر الأول	التقريب
	v_3	v_2	v_1	
c	1.4854	1.2801	0.7752	1
$c - \epsilon'_2$	1.5032	1.3048	0.7968	2
$c - \epsilon''_2$	1.5036	1.3054	0.7974	3

ان الجذور $v^{(1)}$ قد تم استخراجها باهمال التصحيحات ϵ . ولكي نجد قيم التصحيحات . فان قيم فروق $v^{(1)}$ المركزية المتتالية قد دونت في الجدول 4.5 . ولعدم وجود قيم افضل . فان الفرق الرابع افترض ثابتا وهو يساوي $\delta^4 v_2 = -0.3618$. علما بان قيم $\delta^4 v_i$ المفروضة قد وضعت داخل اقواس وباستعمال $\delta^4 v$ والحد الاول من مفكوك ϵ_2 [المعادلة (2.7.16)] تم الحصول على قيمة التصحيح ϵ_2 التقريبية وهي :

$$\epsilon'_2 \doteq -\frac{\delta^4 v}{12} = 0.0301,$$

والتي عند تعويضها في المعادلة (4.3.8) تعطي :

at $z = \frac{1}{4}$ عند $-2.5312v_1 + v_2 = -0.6821 - 0.0301 = -0.7122$;
at $z = \frac{1}{2}$ عند $v_1 - 2.8125v_2 + v_3 = -1.3396 - 0.0301 = -1.3697$;
at $z = \frac{3}{4}$ عند $v_2 - 3.0938v_3 = -3.3156 - 0.0301 = -3.3457$. (4.4.1)

جدول (4 - 5)

i	v_i	$\delta v_{i+\frac{1}{2}}$	$\delta^2 v_i$	$\delta^3 v_{i+\frac{1}{2}}$	$\delta^4 v_i$	ϵ'_2
0	0					
		0.7752				
1	0.7752		-0.2703		(-0.3618)	(0.0301)
		0.5049		-0.0293		
2	1.2801		-0.2996		-0.3618	0.0301
		+0.2053		-0.3911		
3	1.4854		-0.6907		(-0.3618)	(0.0301)
		-0.4855				
4	1.0000					

ان معاملات منظومة المعادلات (4.4.1) هي نفس معاملات المنظومة (4.3.8)
غير ان الثوابت مختلفة . ولذلك يكون من المناسب حلها باضافة عمود جديد من الثوابت
الى نهج كاوس الوارد في الجدول 4.4 . اما جذورها $v_i^{(2)}$ فهي في السطر الثاني من اسفل
الجدول 4.4 وبحساب فروق $v_i^{(2)}$ نحصل . بالمثل . على القيمة المحسنة ϵ'_2 للتصحيح
 ϵ_2 وعلى مجموعة جديدة لقيم الثوابت لاعضاء الطرف الايمن من الجدول 4.4 .

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم تقريبية $v_i^{(3)}$ الى v ثم نستمر على هذا المنوال
حتى تصبح التصحيحات مستقرة . وفي المسألة التي ندرسها يحدث هذا عند التقريب
الثالث فنصل الى القيم النهائية التي ظهرت في السطر الثالث من الجزء الاسفل للجدول 4.4
بالأمكن استعمال تصحيح فوكس Fox مع التقريب $n = 2$ من المسألة نفسها*
وذلك بالتعبير عن التصحيح بدلالة v^{iv} [المعادلة (2.7.10)]

$$\epsilon_2 \doteq -\frac{h^4 v^{iv}}{12}. \quad (a)$$

نحصل على v^{iv} بتفاضل المعادلة (4.3.3) مرتين

$$v^{iv} = 2(9z + 2)v'' + 36v' - 2(9z + 20)e^z,$$

(*) المسألة المثلة بالمعادلات (4.3.4) (4.3.6)

وباستعمال (المعادلة (4.3.3) مرة أخرى

$$r^{iv} = 2(9z + 2)[2(9z + 2)r - 2(9z + 2)c^2] + 36r' - 2(9z + 2)c^2.$$

وفي هذا التعبير الأخير استعاضنا عن r' بمعدل الفرق المركزي المناظر

$$hr'_1 \doteq \mu \delta r_1 = \frac{v_2}{2} - \frac{v_0}{2} = 0.5.$$

باستخدام المعادلة (a) عندما $z = \frac{1}{2}$ ، $hr'_1 = 0.5$ نحصل على :

$$\epsilon_2^{(1)} = -\frac{h^4 \eta^{iv}}{12} = 0.619$$

وعليه فالمعادلة المصححة (4.3.7)

$$-5.25r_1 + 1 = -5.359 - 0.619 = -5.978,$$

ومنها ينتج $n_1^{(2)} = 1.329$ وباعادة هذه العملية نحصل بالتعاقب على ما يأتي :

$$\epsilon_2^{(2)} = 0.515; \quad r_1^{(3)} = 1.309;$$

$$\epsilon_2^{(3)} = 0.533; \quad r_1^{(4)} = 1.313;$$

$$\epsilon_2^{(4)} = 0.529; \quad r_1^{(5)} = 1.312.$$

كان من الممكن ان نستعمل نفس طريقة تقرب التصحيحات بالمشتقات في الحل عندما $n = 4$

RELAXATION (b) الارخاء

يصبح الارخاء كفوءا بوجه خاص وذلك عندما نستعمل تصحيحات فوكس Fox لتحسين النتائج المقربة التي نحصل عليها باستعمال الفروق المحدودة .

لقد وجدنا اعلاه . مثلا . ان التصحيح الاول $\epsilon_2^{(1)} = 0.0301$ طرح من جميع الثوابت في المنظومة (4.3.8) للحصول على المنظومة المصححة (4.4.1) . ولذلك فالثوابت k للمنظومة المصححة (4.4.1) (التي هي معدة للمعاودة) تساوي الثوابت $k^{(1)}$ للمنظومة غير المصححة (4.3.8) المهيئة للمعاودة [المنظومة (c) قسم 1.13] زائدا المقدار $\delta k_i^{(1)} = \epsilon_2^{(1)} / a_{ii}$

$$\delta k_1^{(1)} = \frac{0.0301}{2.5312} = 0.0119;$$

$$\delta k_2^{(1)} = \frac{0.0301}{2.8125} = 0.0107;$$

$$\delta k_3^{(1)} = \frac{0.0301}{3.0938} = 0.0097.$$

ولذلك اذا استعملت الجذور للمنظومة غير المصححة من الجدول 1.15 بمثابة قيم ابتداء فان البواقي R_i تساوي δk_i ويمكن احتساب الجذور المصححة بارخاء هذه البواقي . وكما هو موضح في الجدول 4.6 يمكن استعمال الارخاء الكتلي في الخطوة الاولى مع معاملات مقربة [المنظومة (d) البند 1.13] وباعتبار $\delta = 200$ ان البواقي النهائية تحسب بمعاملات المنظومة (c) الثامنة البند 1.13 .

جدول (٤-٦)

7753	119	12802	107	14855	97
200	1	200	51	200	39
19	19	50	1	-23	23
	-1	-2	9		-1
			2		
$r_i^{(2)}$ 7972	-1	13050	1	15032	0

ان التصحيح الثاني $\epsilon_i^{(2)}$ المحسوب بواسطة القيم $r_i^{(2)}$ يقوى . اوات جديدة هي

$$\delta k_i = \epsilon_i^{(2)} / a_{ii};$$

$$\delta k_1^{(2)} = 0.0122; \quad \delta k_2^{(2)} = 0.0110; \quad \delta k_3^{(2)} = 0.0100,$$

والتي تختلف بثلاث وحدات في الموقع الاخير عن الكمية السابقة $\delta k_i^{(1)}$. وعليه فباستعمال القيم $v_i^{(2)}$ الاولى من الجدول 4.6 والفروق 0.0003 بمثابة بواقي نحصل على التقريب الثالث $v_i^{(3)}$ بجهد اضافي بسيط كما هو موضح في الجدول 4.7

جدول (٤-٧)

7972	3	13050	3	15032	3
4	4	3	1	4	4
	1	3	3		1
$v_1^{(3)}$	7976	0	13056	0	15036
					1

يمكن الحصول على خط بياني أكثر دقة لدالة درجة الحرارة $v(z)$ بتجزئة فترة التعريف (0,1) إلى ستة فترات فرعية عرض الواحدة منها $h = \frac{1}{6}$. إن مجموعة المعادلات الخطية لقيم الارتكاز v تصبح في هذه الحالة ، وبموجب المعادلة (4.3.4) منظومة الجدول 4.8 .

وقد أدرجت هذه المنظومة في الجدول 4.9 لقيم ابتداء تم الحصول عليها بالاستكمال

جدول (٤-٨)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	k	المعاملات الكتلية
-1	0.4557				0.1047	-0.5443
0.4390	-1	0.4390			0.1702	-0.1220
	0.4235	-1	0.4235		0.2521	-0.1530
		0.4091	-1	0.4091	0.3541	-0.1818
			0.3956	-1	0.8760	-0.6044

الخطي للجذور المناظرة إلى $h = \frac{1}{6}$ كما أن البواقي قد جرى تحقيقها بعد الحصول على ثلاث أو أربع أو خمس أرقام معنوية . أما التصحيحات فقد استخرجت قيمها بطريقة الفروق التقريب الثاني للجذور حسبت وايضا قد حسبت فروقها للحصول على تصحيحات للتصحيحات وعليه يكون قد حصلنا أيضا على التقريب الثالث للجذور .

جدول (٩-٤)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	توضيحات
	0.56	0 1.00	-1 1.31	2 1.43	3 1.33	القسم الاولى، والبواقي
				0 6	1 12	
	0.560	0 1.000	-1 1.310	-2 1.490	-3 1.450	الجذور لوحدة واحدة
		-5 -10	-6 -8	-7 -6	-8 -4	في المرتبة العشرية
	-6	-5 -6	-6 -4	-7 -3	-8 -2	ثم تحقيق البواقي
	-4	0 -4	0 -4	-1 -4	1 -4	الأخطاء الكتلي
	0.5600	0 0.9800	1 1.2980	-2 1.4830	-3 1.4620	الجذور لوحدة واحدة
	13	14 10	15 8	16 6	17 4	في المرتبة الثالثة
	5	2 5	-1 5	-1 5	-1 5	للعشرية وتحقيق البواقي
						الأخطاء الكتلي
	0.55180	0 0.98150	-2 1.29570	-3 1.48250	-4 1.46250	تحقيق البواقي
	-13	24 -13	-25 -13	-26 -13	-27 -13	الأخطاء الكتلي
	24	-25 -12	-26 -13	-27 -13	-28 -13	
	-8	-9 -6	-10 -4	-11 -3	-12 -2	
	-5	1 -5	-1 -5	-1 -5	-1 -5	الأخطاء الكتلي
	0.55178	1 0.98110	-1 1.29535	-1 1.48227	2 1.46238	تحقيق البواقي
$v_1^{(1)}$	0.5518	0 0.9811	1 1.2954	2 1.4823	3 1.4624	التقريب للجذور الأولى
	115	-58 116	-59 115	-60 115	-61 115	المرتبة اعشرية الرابعة
	-58	-59 -32	-60 -32	-61 -32	-62 -32	والتصحيفات الأولى
	-15	0	13 13	14 13	15 13	الأخطاء الكتلي
			0 3	1 2	0 1	
	0.55600	0 0.98940	1 1.30860	-2 1.49950	-3 1.47870	تحقيق البواقي
	18	18 4	19 0	20 0	21 0	الأخطاء الكتلي
	-1	0		-1	0	
	0.55617	0 0.98962	-1 1.30878	0 1.49982	1 1.47885	تحقيق البواقي
					1 2 0	
	0.55017	0 0.98962	-1 1.30878	0 1.49982	1 1.47887	تحقيق البواقي
$v_1^{(2)}$	0.5562	0 0.9896	1 1.3088	2 1.4998	3 1.4789	التقريب الثاني للجذور
	7	-1 7	0 7	0 7	1 7	والتصحيفات الثانية
						الأخطاء الكتلي
$v_1^{(3)}$	0.5569	0.9903	1.3095	1.5005	1.4796	

4.5 (تحسين الحل بالاستيفاء

Improvement of Solution by Extrapolation

في البنود السابقة لاحظنا ان دوال درجة الحرارة $v(z)$ في مسألة القيم الحدودية (4.3.3) قد حصلنا عليها بموجب الفروق المركزية . وبوجه خاص قد تم تقريب $h^2 v$ بواسطة $\delta^2 v$ وترتب على هذا خطأ من مرتبة h^2 في v .

وعليه فانه يمكن استعمال استيفاءات (h^2, h^4) , h^2 [البند 2.13 ()] لتحسين قيمة $v(\frac{1}{2})$. على سبيل المثال . الجدول (4.10) يعطينا القيم المقربة الاولى الى $v(\frac{1}{2})$ والتي تم الحصول عليها باتخاذنا $n = 2, 4, 6$ فترات فرعية subintervals كما ان استيفاء h^2 الى $n_2/n_1 = 4/2$ والى $n_2/n_1 = 6/4$ وقيم (h^2, h^4) المستوفاة عندما $n_2/n_2/n_1 = 6/4/2$ ادرجت في الجدول نفسه . أما معاملات الاستيفاء فقد اخذت من الجدولين 2.12, 2.13 على التوالي :

جدول (4-10)

استيفاء h^4	n	مصححة $v(\frac{1}{2})$	استيفاء (h^2, h^4)	n	استيفاء h^2	n	غير مصححة $v(\frac{1}{2})$
1.3050	2,4	1.3120	1.3081	2,4,6	1.3033	2,4	1.2110
1.3105	4,6	1.3054			1.3076	4,6	1.2802
		1.3095					1.2954

ان استيفاء h^2 مثلاً

$$v(\frac{1}{2}) \Big]_{2,4} = 1.3333 \cdot 1.2802 - 0.3333 \cdot 1.2110 = 1.3033$$

يختلف بمقدار 0.16 عن قيمة $v_2^{(3)} = 1.3054$ والتي تم الحصول عليها بموجب اربع فترات فرعية وتصحيحين (جدول 4.4) وبالاسلوب نفسه فان قيمة :

$$v(\frac{1}{2}) \Big]_{4,6} = 1.8 \cdot 1.2954 - 0.8 \cdot 1.2802 = 1.3076$$

هي 0.08 اقل من قيمة $v_3^{(3)} = 1.3095$ والتي تم الحصول عليها بموجب ستة فترات فرعية وتصحيحين (جدول 4.9) على فرض انها افضل قيمة يمكن الحصول عليها دون اجراء عملية الاستيفاء .

ان الجدول 4.10 يحتوي ايضا على قيم $v(\frac{1}{2})$ التي تم الحصول عليها بموجب فترات فرعية هي على التوالي 6.4.2 المحسنة باستعمال تصحيحات فوكس وبما ان ادخال التصحيح $-\delta^4 v/12$ يكافئ ما نحصل عليها عند اخذنا الحدين الاوليين من مفكوك الفرق $h^2 D^2$ [المعادلة (2.7.15)] ، لذلك فان الخطأ في المشتقة الثانية للحل المصحح هو من المرتبة h^4 وعليه يجوز تطبيق استيفاءات h^4 على قيم $v(\frac{1}{2})$ المصححة .

ان نتائج استيفاء h^4 المطبقة على القيم المصححة تظهر في الجدول 4.10 لقيم $n_2/n_1 = 4/2$ وكذلك $n_2/n_1 = 6/4$ وهكذا ، بموجب ماجاء في الجدول 2.14 نحصل على

$$v(\frac{1}{2}) \Big]_{2,4} = 1.0667 \cdot 1.3054 - 0.0667 \cdot 1.3120 = 1.3050;$$

$$v(\frac{1}{2}) \Big]_{4,6} = 1.2462 \cdot 1.3095 - 0.2462 \cdot 1.3054 = 1.3105.$$

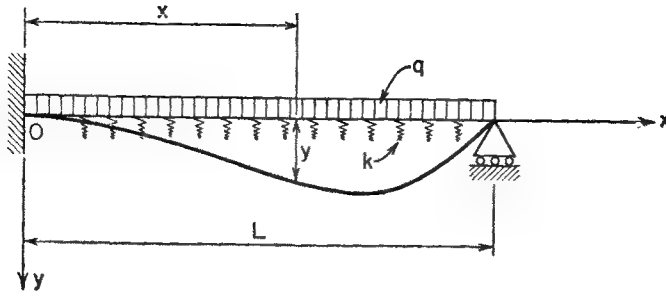
في هذا المثال يبدو بوضوح ان الاستيفاءات في النمط h^2 قد تستعمل للاستفادة من مزاياها في توفير جهد اعمال الفروق التي تتطلبها حسابات التصحيحات فيما يتعلق بحلول الفروق المحدودة لمسائل القيم الحدودية ، من المفيد ملاحظة انه يمكن الحصول على تقريبات افضل لمشتقات دالة ما بزيادة عدد الحدود في مفكوك الفروق المحدودة او بتصغير الفاصلة

ان الاسلوب الاول يتضمن قوانين معقدة وعددا اقل من نقاط الارتكاز وعلى قوانين ابسط . ان التمييز لمعرفة أيأ من الاسلوبين افضل يعتمد اساسا على نمط المسألة التي يراد حلها وعلى التداير الحسابية المتاحة وعلى ذهنية من يحسب ، الا ان تصغير الفاصلة h هو الشيء الوحيد الذي يضمن الاقتراب من الحل الصحيح .

4.6 (حل المسائل العالية المرتبة بالفروق المركزية

Solution of Higher-order Problems by Central Differences

كمثال على الحل بالفروق المركزية لمسألة قيم حدودية تشتمل على مشتقات من مرتبات عالية نأخذ المثال التالي الذي يختص بانحراف deflection عتبة تستند على قاعدة مرنة elastic وعليها حمل منتظم q



شكل (٤-٣)

هذه العتبة جسوءة انثنائية (flexural rigidity) EI وهي مثبتة في النهاية اليسرى ($x = 0$) وبسيطة المسند عند الطرف اليمين ($x = L$) (شكل 4.3)

ان مسألة القيم الحدودية التي تتحكم في انحراف العتبة y تتعين بما يأتي (راجع مثلاً المعادلات التفاضلية البند 10.8) :-

$$y^{iv} + \frac{k}{EI} y = \frac{q}{EI}; \quad (4.6.1)$$

$$y(0) = y'(0) = y(L) = y''(L) = 0,$$

علماً بان k هو معامل الاساس $foundation modulus$ (وهو القوة لكل وحدة انحراف لكل وحدة من طول العتبة) .

ولكي تُحل هذه المسألة بالفروق المركزية من المرتبة h^2 . نُحول المعادلة أولاً الى صيغة لا بعدية nondimensional form وذلك بتبديل المتغير x الى متغير z وكالاتي :

$$z = \frac{x}{L}; \quad \frac{d}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d}{dz}; \quad x = 0, \quad z = 0; \quad x = L, \quad z = 1,$$

حيث تصبح المعادلة :

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{kL^4}{EI} y = \frac{qL^4}{EI}$$

ومن ثم نقسم فترة تعريف المتغير z وهي (0,1) الى n من الاجزاء المتساوية طول الجزء الواحد منها $h = 1/n$ ثم تضرب المعادلة كلها بـ $h^4 = 1/n^4$:

$$\frac{h^4 d^4 y}{dz^4} + \frac{kL^4}{n^4 EI} y = \frac{qL^4}{n^4 EI}.$$

وبتقريب المقدار $h^4 d^4 y/dz^4$ واتخاذ $\delta^4 y_i$

بدلاً منه يحصل :

$$\delta^4 y_i + \frac{kL^4}{n^4 EI} y_i = \frac{qL^4}{n^4 EI}$$

أو بموجب المعادلات (2.7.16) :

$$y_u - 4y_i + 6y_i - 4y_r + y_{rr} + \frac{kL^4}{n^4 EI} y_i = \frac{qL^4}{n^4 EI}$$

أخيراً بجعلنا :

$$\frac{kL^4}{EI} = K, \quad (4.6.2)$$

تصبح معادلة الفروق (4.6.1) على الصورة التالية :

$$y_u - 4y_i + \left[\frac{K}{n^4} + 6 \right] y_i - 4y_r + y_{rr} = \frac{qL^4}{n^4 EI} \quad (4.6.3)$$

وعند اخذ

$$q = 43,400 \text{ lbs/in.}, L = 120 \text{ in.}, \text{ and } I = 3 \cdot 10^3 \text{ in.}^4,$$

$$E = 30 \cdot 10^6 \text{ psi}, \quad k = 2,604 \text{ psi},$$

فان $K=6$ والكمية $qL^4/EI = 100$ تصبح المعادلة (4.6.3) على الصورة التالية :

$$y_u - 4y_i + 6 \left(\frac{n^4 + 1}{n^4} \right) y_i - 4y_r + y_{rr} = \frac{100}{n^4} \quad (a)$$

ان شروط المعادلة (4.6.1) الحدودية قد حولت الى شروط الفروق المركزية بموجب

المعادلة (4.1.1)

$$y_0 = 0; \quad y_{-1} = y_1; \quad y_n = 0; \quad y_{n+1} = -y_{n-1}. \quad (b)$$

ان مسألة الفروق المحدودة بالمعادلتين (a), (b) يمكن حلها بان نجعل h تتخذ قيمة كبيرة أي أن قيم n تكون صغيرة ، كما ان دقة y يمكن زيادتها لأية درجة من الدقة وذلك بزيادة قيمة n في خطوات قيمة كل منها واحد .
التقريب عندما $n = 2$

عندما تكون $n = 2$ (شكل (4.4a)) فان استعمال المعادلة (a) عند $z = \frac{1}{2}$ يعطي

$$y_1 - 4 \cdot 0 + 6 \frac{2^4 + 1}{2^4} y_1 - 4 \cdot 0 - y_1 = \frac{100}{2^4},$$

ومن هذه نجد ان : $y(\frac{1}{2}) = y_1 = 0.98$

التقريب عندما $n = 3$

عندما $n = 3$ كما في (شكل 4.4b) فالمعادلة (a) تعطي

$$z = \frac{1}{3} \text{ في } y_1 + 6 \frac{3^4 + 1}{3^4} y_1 - 4y_2 = \frac{100}{3^4};$$

$$z = \frac{2}{3} \text{ في } -4y_1 + 6 \frac{3^4 + 1}{3^4} y_2 - y_2 = \frac{100}{3^4},$$

ومن هذه ينتج :

$$y(\frac{1}{3}) = y_1 = 0.50; \quad y(\frac{2}{3}) = y_2 = 0.69.$$

التقريب عندما $n = 4$

عندما $n = 4$ كما في الشكل (4.4c) فالمعادلة (a) تعطينا

$$z = \frac{1}{4} \text{ في } y_1 + 6 \frac{4^4 + 1}{4^4} y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{100}{4^4};$$

$$z = \frac{1}{2} \text{ في } -4y_1 + 6 \frac{4^4 + 1}{4^4} y_2 - 4y_3 = \frac{100}{4^4};$$

$$z = \frac{3}{4} \text{ في } y_1 - 4y_2 + 6 \frac{4^4 + 1}{4^4} y_3 - y_3 = \frac{100}{4^4},$$

ومنها ينتج :

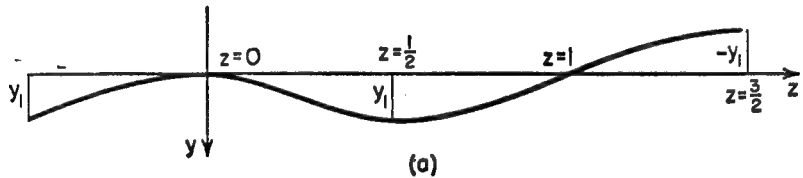
$$y(\frac{1}{4}) = y_1 = 0.34; \quad y(\frac{1}{2}) = y_2 = 0.64; \quad y(\frac{3}{4}) = y_3 = 0.51.$$

ان قيمة y عند $z = \frac{1}{2}$ يمكن تحسينها باستيفاء h^2 باستعمال حلي $n = 4$, $n = 2$

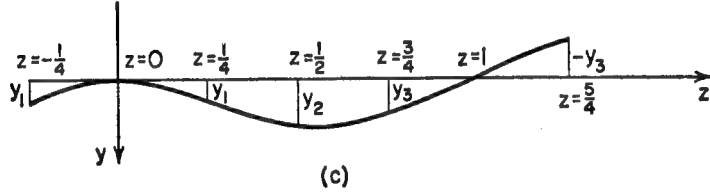
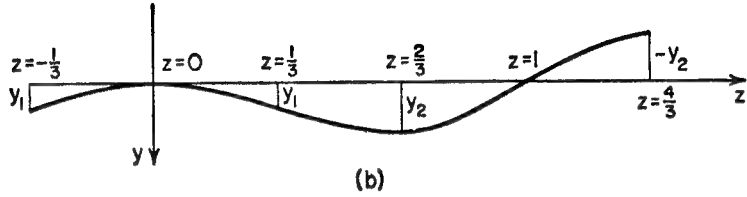
$$y(\frac{1}{2}) \Big]_{2,4} = 1.333 \cdot 0.64 - 0.333 \cdot 0.98 = 0.53,$$

وفيها خطأ قدره 3.9 بالمائة عند مقارنة هذه القيمة مع القيمة التي نحصل عليها من

الحل المحكم للمسألة نفسها



جدول (4-4)



شكل (4-4)

4.7 حل مسائل القيم المميزة

Solution of Characteristic Value Problems

سنورد في هذا البند طريقة لحل مثل هذه المسائل تعتمد على استعمال الفروق المحدودة وعلى الاستيفاءات (لزيادة الاطلاع انظر البند 3.12 بما يتعلق بالطريقة التي تعتمد على عمليات التكامل الامامية) .

كمثال على مثل هذه الحلول اليك مألة اويلر Euler الخاصة بحدل عتبة بسيطة المسند عند الطرف الايمن ($x = L$) ومبنية عند نهاية الطرف الايسر ($x = 0$) والتي تقع تحت تأثير قوى محورية ضاغطة P (كما في الشكل 4.5) ان الانحرافات y لمحور العتبة x تتغير بمعادلة القيم المميزة التالية :

$$y^{iv} + \frac{P}{EI} y'' = 0; \quad (4.7.1)$$

$$y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0,$$

حيث EI تمثل الجسوة الانثنائية flexural rigidity للعتبة .

يمكن الحصول على مسألة الفروق المناظرة وذلك بالتعويض عن المشتقات في المعادلة وفي الشروط الحدودية بما يقابلها من مؤثرات الفروق المركزية في الشكل 2.8a او المعادلة (2.7.16) ولهذا الغرض ندخل اولاً تبديل المتغير حيث نجعل :

$$z = \frac{x}{L}; \quad \frac{d}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d}{dz}; \quad x = 0, \quad z = 0; \quad x = L, \quad z = 1,$$

حيث تختزل المعادلة (4.7.1) الى صيغة لابعدية :

$$y^{iv} + \frac{PL^2}{EI} y'' = 0, \quad (a)$$

علما بان المشتقات هي الان بالنسبة الى z وبقسمة فترة التعريف $(0,1)$ الى n من الاقسام المتساوية طول الواحد منها $h = 1/n$ ثم بضرب المعادلة (a) في h^4 تصبح المعادلة :

$$h^4 y^{iv} + \frac{PL^2}{n^2 EI} (h^2 y'') = 0.$$

وبتعويض $\delta^4 y_i$ عن $h^4 y^{iv}$ وتعويض $\delta^2 y_i$ عن $h^2 y''$ فان هذه التعويضات تعطينا معادلة الفروق التالية :

$$\delta^4 y_i + k_n \delta^2 y_i = 0, \quad (b)$$

حيث

$$k_n = \frac{PL^2}{n^2 EI} = \frac{1}{n^2} K_n. \quad (4.7.2)$$

وباستعمال المعادلات (2.7.16) بدلا عن $\delta^2 y_i, \delta^4 y_i$ تصبح معادلة الفروق

المحددة :

$$y_u - 4y_i + 6y_i - 4y_r + y_{rr} + k_n(y_i - 2y_i + y_r) = 0$$

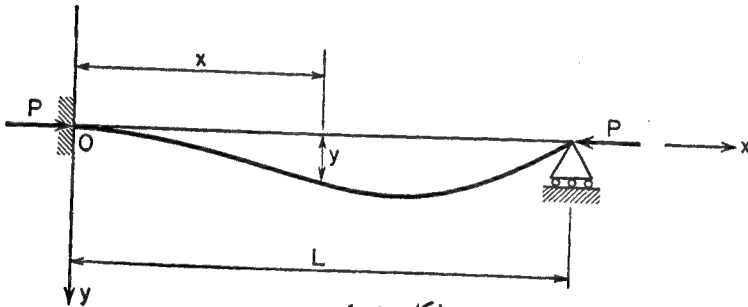
واخيرا فان هذه المعادلة يمكن كتابتها على الوجه التالي :

$$y_u + (k_n - 4)y_i + (6 - 2k_n)y_i + (k_n - 4)y_r + y_{rr} = 0. \quad (4.7.3)$$

ان المعادلة (4.7.3) صحيحة عند $n - 1$ من نقاط الارتكاز الداخلية $i = 1, 2, \dots, n - 1$

ان الشروط (4.7.1) يجب ان تحقق عند نهايتي العتبة ، وتعويض معادلات الفروق

المركزية (2.7.16) فيها تتحول هذه الشروط الى معادلات الفروق (4.1.1)



شكل (4-5)

$$y_0 = 0; \quad y_{-1} = y_1; \quad y_n = 0; \quad y_{n+1} = -y_{n-1}, \quad (4.7.4)$$

علما بأن y_{n+1} و y_{n-1} هي انحرافات نقاط الارتكاز ، على محور العتبة ، الممتدة بمقدار h بعيدا عن موضع الاسناد . ان المجموعة المؤلفه من $n - 1$ من المعادلات الجبرية المتجانسة لها حل صفري هو $y_i = 0$ ينظر الصورة المستقيمة لتوازن العتبة الا أنه قد يكون لها حل لاصفري على شرط أن تكون محددة المعاملات Δ (والتي هي دالة k_n) تطابق الصفر . ان معادلة المحددة : $\Delta(k_n) = 0 \dots 4.7.5$ هي معادلة جبرية ، ولتكن مرتبتها p . في k_n وجذورها هي التقريبات لاول p من القيم المميزة k أي لأول p من الاحمال الحرجة P وحيث ان القيمة الحرجة الاولى هي القيمة الوحيدة المهمة عمليا فان المعادلة المحددة (موضوعة على شكل محددة) سوف تحل لأصغر جذر k .

من المناسب ان نبدأ الحل بقيم n صغيرة ومن ثم نزيد قيمة n تدريجيا بمعنى ان نجعل الفاصلة h لنقاط الارتكاز تزول الى $1/n$

التقريب $n = 2$:

عندما $n = 2$ (شكل 4.4a) المعادلة (4.7.3) تعطينا

$$y_1 + (k_2 - 4) \cdot 0 + (6 - 2k_2)y_1 + (k_2 - 4) \cdot 0 - y_1 = 0,$$

$$(6 - 2k_2)y_1 = 0.$$

ولكي تختلف y_1 عن الصفر فان $6 - 2k_2$ يجب ان تتلاشى $k_2 = 3$ وان

$$K_2 = 2^2 k_2 = 12.$$

التقريب $n = 3$:

عندما $n = 3$ (شكل 4.4b) فالمعادلة (4.7.3) تعطينا :

$$z = \frac{1}{3} \text{ في } y_1 + (6 - 2k_3)y_1 + (k_3 - 4)y_2 = 0;$$

$$z = \frac{2}{3} \text{ في } (k_3 - 4)y_1 + (6 - 2k_3)y_2 - y_2 = 0;$$

$$(7 - 2k_3)y_1 + (k_3 - 4)y_2 = 0; \text{ او ان}$$

$$(k_3 - 4)y_1 + (5 - 2k_3)y_2 = 0.$$

ان محددة هذه المنظومة الخطية التي تساوى بالصفر هي معادلة من الدرجة الثانية

بالنسبة الى k_3 :

$$\begin{vmatrix} (7 - 2k_3) & (k_3 - 4) \\ (k_3 - 4) & (5 - 2k_3) \end{vmatrix} = (7 - 2k_3)(5 - 2k_3) - (k_3 - 4)^2$$

$$= 3k_3^2 - 16k_3 + 19 = 0,$$

وجذرهما الاصغريساوى 1.78475. ولذلك فان

$$K_3 = 3^2 k_3 = 16.063$$

التقريب $n = 4$

عندما $n = 4$ شكل (4.4c) . المعادلة (4.7.3) تعطينا :

$$z = \frac{1}{4} \text{ في } y_1 + (6 - 2k_4)y_1 + (k_4 - 4)y_2 + y_3 = 0;$$

$$z = \frac{1}{2} \text{ في } (k_4 - 4)y_1 + (6 - 2k_4)y_2 + (k_4 - 4)y_3 = 0;$$

$$z = \frac{3}{4} \text{ في } y_1 + (k_4 - 4)y_2 + (6 - 2k_4)y_3 - y_3 = 0.$$

الجذر الاصغر لمعادلة المحددة المناظرة هو $k_4 = 1.11075$ ومن هذه ينتج

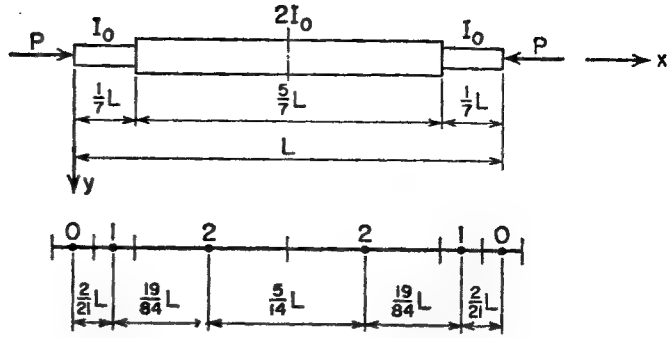
$$K_4 = 4^2 \cdot 1.11075 = 17.772.$$

انه بالامكان ان نبرهن* ان الخطأ في القيمة المتميزة K . وللمعادلة التي معاملاتها ثابتة . الناتجة من الفروق المركزية هي ايضا من مرتبة h^2 ولذلك فانه يمكن استعمال استيفاءات h^2, h^4, h^2 التي استخرجت قيمتها بموجب معاملات البند 2.13 لتحسين نتائج الحسابات . الجدول 4.11 يحتوي على قيم K_n . واستيفاءاتها ، والنسب المتوية للاخطاء المحسوبة بموجب القيمة الحقيقية $K = 20.187$

جدول (4-11)

n	K_n	$e(\%)$
2	12.000	-40.5
3	16.063	-20.4
4	17.772	-12.0
n	h^2 -extr.	$e(\%)$
2,3	19.313	-4.3
3,4	19.969	-1.1
n	(h^2, h^4) -extr.	$e(\%)$
2,3,4	20.189	0.01

(*) انظر سلفادوري الحسابات العددية لأحمال الحدل بالفروق المحدودة (1951) Trans. ASCE, 117



شكل (٦-٤)

ان الزيادة في الدقة . البسيرة الاقتناء بالاستيفاء . تتحقق فقط بزيادة عدد نقاط الارتكاز ومن ثم حل معادلة محددة درجتها عالية .

4.8 استعمال نقاط ارتكاز غير منتظم الفواصل :

The Use of Unevenly Spaced Pivotal Points

ان مؤثرات الفروق المحددة التي استعملت في البنود السابقة اعتمدت استعمال نقاط ارتكاز منتظمة (متساوية) الفواصل . غير ان من الافضل حل العديد من المسائل الفيزيائية باستعمال فواصل غير منتظمة (غير متساوية) .

كمثال على استعمال القوانين او القواعد بفواصل غير متساوية . نأخذ المثال الذي يتناول حمل العتبة المدرجة buckling of a "stepped" beam, البسيطة المسند في نهايتها وتقع تحت تأثير قوى محورية P والتي عزم قصورها الذاتي بتغير $x = L, x = 0$

كما هو مؤشر في الشكل 4.6

ولكي نحل مسألة القيم الحدودية المناظرة (انظر مثلا المعادلات التفاضلية البند 2.11

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0; \quad y(0) = y(L) = 0, \quad (4.8.1)$$

يقسم الجزء المركزي للعتبة الى قسمين متساويين بنقاط ارتكاز (2) عند نقاط الربع quarter - points . اما طرفي العتبة ففي كل منهما نقطة ارتكاز واحدة (0)

في النهاية ونقطة اخرى (1) عند ثلثي طولها من النهاية .

وفي هذه القسمة نجد ان الجزء المركزي يتالف من كومتين طول كل منهما هو

$$\cdot \frac{1}{2}(\frac{3}{4}L) = (\frac{3}{8}L)$$

مع عزم قصور ذاتي $2I_0$. وكل طرف يتألف من كومتين طولها هو $\frac{2}{3}(\frac{1}{2}L) = (\frac{2}{3}L)$

وبعزم قصور ذاتي I_0 . كما ان نصف احد هذه الكوم يقع فعلا خارج نهايتي العتبة وحيث ان الفاصلة h بين نقاط الارتكاز تتغير من نقطة لآخرى . فان المشتقة الثانية الواردة في المعادلة (4.8.1) تقرب بالمعادلة (2.2.3) :

$$h^2 y'' = \frac{2}{\alpha(\alpha + 1)} [\alpha y_l - (1 + \alpha)y_i + y_r], \quad (a)$$

$$h = x_i - x_l; \quad \alpha = \frac{x_r - x_i}{x_i - x_l} \quad (b) \quad \text{حيث}$$

المعادلات (b) تعطيان بالنسبة للمسألة الحالية :

$$(1) \quad h_1 = \frac{2}{3}L; \quad \alpha_1 = \frac{\frac{1}{2}L}{\frac{2}{3}L} = 2.375; \quad \text{في}$$

$$(2) \quad h_2 = \frac{1}{3}L; \quad \alpha_2 = \frac{\frac{1}{2}L}{\frac{1}{3}L} = 1.579. \quad \text{في}$$

ولذلك بضرب المعادلة (4.8.1) في h_i^2 وتعويض المعادلة (a) بدلا عن $h^2 y''$ فان معادلات الفروق تصبح .

$$\begin{aligned} \text{عند (1)} \quad & \frac{2}{2.375(1 + 2.375)} [2.375 \cdot 0 - (1 + 2.375)y_1 + y_2] \\ & + \frac{P}{EI_0} (\frac{2}{3}L)^2 y_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{عند (2)} \quad & \frac{2}{1.579(1 + 1.579)} [1.579y_1 - (1 + 1.579)y_2] \\ & + \frac{P}{E(2I_0)} (\frac{1}{3}L)^2 y_2 = 0 \end{aligned}$$

$$(0.03635K - 3.375)y_1 + y_2 = 0; \quad \text{او تكون :}$$

$$1.579y_1 + (0.05208K - 1.579)y_2 = 0,$$

$$K = \frac{PL^2}{EI_0}. \quad (c)$$

حيث ان المعادلة المحددة المناظرة :

$$\begin{vmatrix} 0.03635K - 3.375 & 1 \\ 1.579 & 0.05208K - 1.579 \end{vmatrix} = 0$$

جذرها الاصغر $K = 19.01$ ومنها ينتج :

$$P_{cr} = 19.01 \frac{EI_0}{L^2}.$$

ان قيمة P_{cr} المستخرجة بطريقة الطاقة وبغرض انحراف على شكل دالة جيب .
والذي من المعروف انها الحد الاعلى لحمل الحذل . تساوي 19.04 (للاطلاع على طريقة
اخرى انظر الاسلوب العددي في حساب التغيرات تأليف Newmark,

تمارين

4.1 عبر عن شروط المعادلة (4.12) الاولى بدلالة :

- (أ) الفروق الامامية Forward differences حيث الاخطاء من المرتبة h
 (ب) الفروق الامامية Forward differences حيث الاخطاء من المرتبة h^2

الاجوبة

(a) $y_0 = 0; y_1 = y_0; y_2 = 2y_1 - y_0; y_3 = 3y_2 - 3y_1 + y_0; y_4 = 4y_3 - 6y_2 + 4y_1 - y_0$. (b) $y_0 = 0; y_2 = 4y_1 - 3y_0; y_3 = 4y_2 - 5y_1 + 2y_0; y_4 = (\frac{1}{3})y_3 - 8y_2 + 6y_1 - (\frac{5}{3})y_0; y_5 = (\frac{1}{2})y_4 - 12y_3 + 13y_2 - 7y_1 + (\frac{3}{2})y_0$.

4.2 استخرج قيمة التكامل الامامي والاستكمال الخطي لقيم الارتكاز الى تكاملات المسائل الحدودية القيمة التالية مستعملاً المؤثرات عندما يكون الخطأ من المرتبة h^2 وعدد الفترات الفرعية المؤشرة كل ازائه :

- (a) $y'' + \frac{1}{x}y = 0; y(1) = 1, y(2) = 2; n = 2, 4$.
 (b) $y'' + (\sin x)y = 0; y(0) = 0, y(1) = 1; n = 2, 4$.
 (c) $y'' + y'y = 0; y(0) = 0, y(1) = 1; n = 4, 6$.

الاجوبة

(a) $n = 4; y_{-1} = 0.586; y_1 = 1.351; y_2 = 1.635; y_3 = 1.850$.

4.3 جد (بموجب متسلسلة تيلر) الحدود الثلاثة الاولى اللاصفرية الى مفكوكات المتسلسلات في حل المسائل التالية معتبرا y'_0, θ'_0 كمجاهيل يجب تعيينها بموجب الشروط الحدودية التالية :-

- (a) $\theta'' + \sin \theta = 0; \theta(0) = 0, \theta(1) = 1$.
 (b) $y'' + y^2 = x^2 + 1; y(0) = 0, y(1) = 0$.

الاجوبة

(b) $y = \begin{cases} -0.5574x + 0.5x^2 + 0.0574x^4 \\ 12.56x + 0.5x^2 - 13.06x^4 \end{cases}$

4.4 عين قيم y في نقاط الارتكاز ذات الفترة (0,1) اذا علمت ان y تحقق المسألة الحدودية القيمة التالية :

$y'' + 4y = 4x^2 + 2; y(0) = 0, y(1) = 1$.

استعمل $n = 2$ ثم $n = 4$. قارن بين النتائج مع الحل المحكم للمسألة ($y = x^2$)
 مينا سبب تطابق الحل المحكم مع الحل العددي مهما كانت قيم n عندما
 تقرب y'' بواسطة $\delta^2 y / h^2$.

4.5 (أ) حل المسألة الحدودية القيمة التالية بموجب قوانين الفرق المركزي عندما
 يكون الخطأ من المرتبة h^2 مستعملا فترتين فرعيتين أو اربع فترات فرعية

$$y'' - 4y' + 4y = e^{3x}; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -2.$$

حل نظام المعادلات الآتية بنهج كاوس .

(ب) استخدام الحد الأول من تصحيح فوكس الى قيم y في التقريب حيث
 $n = 2$

(ج) أعد (ب) عندما $n = 4$

(د) استعمل القيمة غير المصححة الى y عندما $n = 2$ أو $n = 4$

استخرج قيم y المحسنة عندما $x = 0.5$ بطريقة الاستيفاء .

(هـ) أعد (د) لقيم y المصححة (من الجزئين ط . c)

الاجوبة

$$\begin{aligned} (a) \quad y_2^{(1)}(0.50) &= -1.121; \quad y_4^{(1)}(0.25) = -0.3473; \quad y_4^{(1)}(0.50) = \\ &= -0.9508; \quad y_4^{(1)}(0.75) = -1.7257. \quad (b) \quad y_2^{(2)}(0.50) = -0.7840. \\ (c) \quad y_4^{(2)}(0.25) &= -0.3294; \quad y_4^{(2)}(0.50) = -0.9167; \quad y_4^{(2)}(0.75) = \\ &= -1.6884. \quad (d) \quad y_{2,4}^{(1)}(0.50) = -0.8941. \quad (e) \quad y_{2,4}^{(2)}(0.50) = -0.9256. \end{aligned}$$

4.6 (أ) حل المسألة الحدودية القيمة التالية بموجب قوانين الفرق المركزي ذات
 الخطأ من مرتبة h^2 مستعملا اثنين واربع فترات فرعية .

$$y'' - 8y' + 8y = e^x; \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 4.$$

حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كولسكي .

(ب) استخدم الحد الأول من تصحيح فوكس الى قيم y عند التقريب حيث
 $n = 2$

(ج) أعد (ب) عندما $n = 4$

(د) استخدم قيم y غير المصححة حيث $n = 2$ أو $n = 4$ و ثم جد قيم y المحسنة
 عندما $x = 1.5$ ومستعملا طريقة الاستيفاء .

4.7 حل مسألة سريان الحرارة الواردة في البند 4.3 على فرض ان

$$L = 100 \text{ cm}, R = 1 \text{ cm}, k = 1 \text{ cal/sec } ^\circ\text{C cm}^2/\text{cm}, k_1 = 6 \cdot 10^{-4},$$

وبقيم $U(x)$ كما معطاة في الجدول التالي

$$L = 100 \text{ cm}, R = 1 \text{ cm}, k = 1 \text{ cal/sec } ^\circ\text{C cm}^2/\text{cm}, k_1 = 6 \cdot 10^{-4}, u_0 = 1,$$

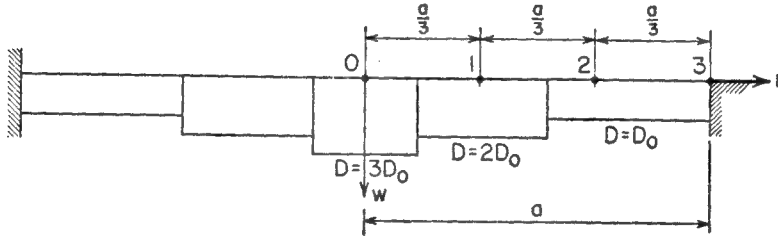
علما بأن (x) محددة بالجدول التالي

$z = x/L$	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$F(z) = U(x)/u_0$	1.00	1.10	1.35	1.15	1.00

الاجوبة

$$v_0 = 0; v_1 = 0.658; v_2 = 0.984; v_3 = 1.035.$$

4.8 صفيحة دائرية الشكل مدرجة نصف قطرها (a) كما في الشكل 4.7 وقد ثبتت بحافتها تنحرف تحت تأثير حمل منتظم q .



شكل 4.7

(أ) عين الميل $\phi(r)$ بموجب المعادلة التالية :

$$\phi'' + \frac{1}{r} \phi' - \frac{1}{r^2} \phi = \frac{-qr}{2D}$$

والتي شروطها الحدودية هي :

$$\phi(0) = 0; \quad \phi(a) = 0,$$

علما بأن r هي المسافة النصف قطرية وان D هي الجسوءة الانثنائية flexural rigidity الخاصة بالصفحة (انظر مثلا المرجع نظرية الصحائف والقشر تأليف ثيمو تشينكو او بنوسكي كريجر الناشر شركة ماكروهل)

(ب) عين انحراف المركز بالتكامل العددي مستعملا قاعدة الشبه المنحرف
4.9 حل السؤال 4.8 في حالة كون الصفيحة تتركز ارتكازا بسيطا وتحقق الشروط
الحدودية التالية :

$$\phi(0) = 0; \quad \phi' + \frac{\nu}{r} \phi \Big|_{r=a} = 0,$$

$\nu = 0.3$ Poisson's ratio على فرض ان نسبة بواسان

$$\phi(a/3) = 0.046qa^3/D_0; \quad \phi(2a/3) = 0.085qa^3/D_0; \quad \phi(a) = 0.096qa^3/D_0;$$

$$w_0 = 0.60qa^3/D_0.$$

الجواب

4.10 عين قيم y في نقاط الارتكاز للفترة (0,1) اذا علمت ان y تحقق مسألة القيم
الحدودية التالية :

$$y''' + 2y = 12x^2 + 2; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0.$$

(أ) استخرج قيمة y التقريبية مستعملا $n = 2$ بموجب الفروق المركزية الموسطة
(averaged) . وكذلك جد y''' بموجب العبارة غير المتماثلة للمعادلة
(2.2.2)

(ب) استعمل $n = 3$ وقرب y''' عند $x = \frac{1}{3}$ بموجب المعادلة (2.2.2)
عند $x = \frac{2}{3}$ بموجب الفروق المركزية الموسطة .
الجواب

$$(a) y_1 = \frac{5}{84} = 0.147, \quad (b) y_1 = 0.186, y_2 = 0.149.$$

4.11 عين قيم y في نقاط الارتكاز للفترة (0,1) اذا علمت ان y تحقق المسألة
الحدودية التالية ومستعملا $n = 3$ والتقريبات المتماثلة للمشتقات .

$$y^{iv} + 81y = 81x^2; \quad y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0.$$

4.12 عين قيم y في النقاط المحورية للفترة (0,1) اذا علمت ان y تحقق مسألة القيم
الحدودية التالية ومستعملا $n = 3$ والتقريبات المتماثلة للمشتقات .

$$y^{iv} + 81y = f(x); \quad y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0.$$

(أ) افرض ان $f(x) = 729x^2$

(ب) حل المسألة نفسها عندما الدالة $f(x)$ في الطرف الأيمن من المعادلة

التفاضلية تتعين بالجدول التالي :

x	1/3	2/3	1
$f(x)$	81	162	243

(a) $y_1 = 1.1539$; $y_2 = 3.9231$; $y_3 = 7.4615$.

(b) $y_1 = 0.6154$; $y_2 = 1.6923$; $y_3 = 2.8462$.

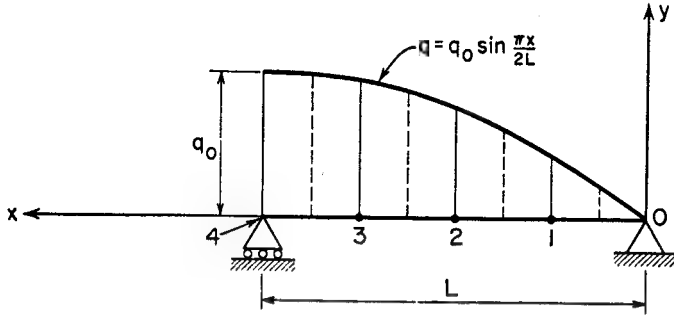
الاجوبة

4.13 (أ) جد قيمة الانحراف عند نقاط الارتكاز للدمامة المرسومة في شكل 4.8 .

مستعملا اربعة فترات فرعية ومكتلا lumping الحمل الموزع عند المراكز .

استخدم تعابير الفرق المركزي ذات الخطأ من المرتبة h^2 .

(ب) جد عزوم الثني bending moments عند المراكز $(M = -EIy'')$



شكل (٨ - ٤)

4.14 (أ) جد قيمة الانحراف عند نقاط الارتكاز للعبة المرسومة في شكل 4.9 .

مستعملا اربعة فترات فرعية وتكتيل الحمل الموزع عند نقاط الارتكاز .

استخدم تعابير الفرق المركزي ذات الخطأ من المرتبة h^2 .

(ب) جد عزوم الثني عند النهاية المبنية $(M = -EIy'')$

$y_3 = -0.000857qL^4/EI$;

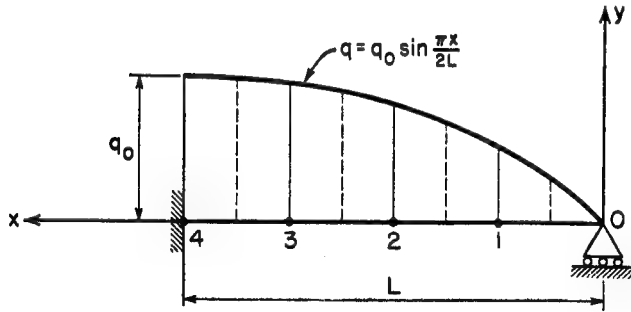
$y_2 = -0.001025qL^4/EI$;

الاجوبة

$y_1 = -0.00142qL^4/EI$;

$M_4 = -0.01828qL^2$.

- 4.15 (أ) جد قيمة الانحراف عند نقاط الارتكاز للعبة المرسومة في شكل 4.10 مستعملا أربعة فترات فرعية ومكتلا الحمل الموزع عند نقاط الارتكاز . استخدم التعابير التفاضلية المركزية ذات الخطأ من المرتبة h^2 (ب) جد عزوم الثني عند نقاط الارتكاز ($M = -EIy''$)



شكل (4-9)

- 4.16 احسب قيمة الانحراف في نقاط الارتكاز لعبة منتظمة الحمل بسيطة الارتكاز التي عزم قصورها الذاتي يتغير خطيا من I_0 عند طرفها الايسر وحتى $5I_0$ عند طرفها الايمن . استعمل تعابير الفرق المركزي ذات الخطأ من مرتبة h^2 والتي عدد فتراتها الفرعية أربع .
الجواب

$$y_1 = 0.003621qL^4/EI_0; y_2 = 0.004883qL^4/EI_0; y_3 = 0.003377qL^4/EI_0.$$

- 4.17 (أ) احسب انحرافات نقاط الأرتكاز لعبة ترتكز على أساس مورن (انظر البند 4.6) ومنتظمة الحمل بسيطة الأرتكاز عند طرفيها حيث أن $k = 16$. استعمل قوانين الفرق المركزية ذات الخطأ من المرتبة h^2 وان $n = 2, 4$ استوف extrapolate قيمة الانحراف عند المركز .

- (ب) جد قيمة عزم الثني عند مقطع منتصف البون mid-span section مستخدما اثنين واربع فترات فرعية ثم استوف ($M = -EIy''$)

- 4.18 عتبة ترتكز ارتكازا بسيطا وكل من عزم قصورها الذاتي I وطولها L ثابتان تتحمل بفعل حملين ضاغطين طوليين متساويين P . استخرج أصغر قيمة حرجة الى P مستعملا الاستيفاء عندما يكون عدد الفترات الفرعية 2 , 3 , 4

تلميح : - ان مسألة القيم المميزة تعرف بموجب المعادلات التالية : -

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0; \quad y(0) = y(L) = 0.*$$

الجواب

$$K = \frac{PL^2}{EI}; K_2 = 8; K_3 = 9; K_4 = 9.3726; K_{2,3} = 9.8; K_{3,4} = 9.85164; \\ K_{2,3,4} = 9.86881.$$

4.19 عتبة رفيعة طولها L ترتكز ارتكازا بسيطا . عزم قصورها الذاتي يتعين كما يأتي

$$I(x) = I_0(1 + 2x/L); \quad 0 \leq x \leq L/2;$$

$$I(x) = I_0(3 - 2x/L); \quad L/2 \leq x \leq L.$$

تتحدل بفعل حملين ضاغطين طوليين P عين أصغر قيمة حرجة الى P مستعملا
من $n = 2, 3, 4$ الفترات الفرعية والاستيفاء من نمط (h^2, h^4) (راجع المسألة)
(4.18)

4.20 عتبة حديدية cantilever beam ذات مقطع عرض مستطيل ضيق مبنية عند
 $x = 0$ قد حملت بحمل مستعرض P عند $x = L$ المطلوب تعيين أصغر قيمة
حرجة ان P تجعل العتبة تتحدل جانبيا مستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات
الفرعية والاستيفاء (h^2, h^4)

تلميح : - ان الدوران β يحقق مسألة القيم المميزة التالية : -

$$\beta'' + \frac{P^2 L^2}{BC} (1 - x/L)^2 \beta = 0; \quad \beta(0) = 0; \quad \beta'(L) = 0.$$

الجواب

$$P_2 = 4 \sqrt{BC/L^4}; P_3 = 3.933 \sqrt{BC/L^4}; P_4 = 3.959 \sqrt{BC/L^4}, \\ P_{2,3,4} = 4.030 \sqrt{BC/L^4}; P = 4.013 \sqrt{BC/L^4}.$$

(انظر صحيفة 245 من نظرية الاستقرار المرن تأليف تيموشنكو) .

4.21 عتبة ذات مقطع عرضي ضيق مستطيل ترتكز ببساطة عند $x = \pm L/2$ بينما
يمنع دوران نهايتها حول محور العتبة . العتبة تتحدل جانبيا بفعل حمل شاقولي عند
 $x = 0$. المطلوب تعيين أصغر قيمة حرجة الى P بدلالة B . اصغر جسوءة

انثنائية للعتبة في مستواها الرئيسي C ، جسوءة الالتواء : L . طول العتبة .
استعمل $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية واستيفاء $P_{2,4}$
تلميح : - دوران β يحقق مسألة القيم المميزة التالية : -

$$\beta'' + \frac{P^2 L^2}{4BC} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right)^2 \beta = 0; \quad \beta \left(\frac{L}{2} \right) = \beta \left(-\frac{L}{2} \right) = 0. \dagger$$

4.22 صفيحة دائرية نصف قطرها R وجسوءتها الانثنائية D ثبتت من حافها ، تتحدد بتأثير كبس منتظم قدره N لكل وحدة طول . المطلوب تعيين أصغر قيمة حرجة N مستعملا $n = 2, 3$ كعدد للفترات الفرعية والاستيفاء ، مع العلم أن ميل الصفيحة ϕ يحقق مسألة القيم المميزة التالية : -

$$\phi'' + \frac{1}{r} \phi' + \left(\frac{N}{D} - \frac{1}{r^2} \right) \phi = 0; \quad \phi(0) = \phi(R) = 0. *$$

$$N_2 = 12.00D/R^2; N_3 = 13.50D/R^2; N_{2,3} = 14.70D/R^2; \\ N = 14.68D/R^2.$$

الجواب

4.23 المناويل modes وترددات عتبة قص shear beam يتغير ثابت نابضها خطيا تحكم بمسألة القيم المميزة التالية :

$$\frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dx}{dz} + \frac{K^2}{z} x = 0; \quad x(1) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dz} \right|_{0.5} = 0,$$

علما بأن $K^2 = \omega^2 L^2 m_0 / \alpha^2 k_0$ وان k_0, m_0 وحدة الكتلة ووحدة ثابت النابض يساويان $m \Big|_{z=0}$ و $k \Big|_{z=0}$ وان L هو طول العتبة α تدل على الميل المتمم لخط ثابت النابض احسب قيم ω^2 الثلاثة التي هي أصغر ما يمكن مستعملا فترات فرعية عددها $n = 1, 2, 3, 4$ والاستيفاء .

(المناويل جمع منوال وهي الكمية التي تتكرر بأكثر نسبة ص ٩٧٣ معجم الوسيط / معجم اللغة العربية) .

4.24 عمود رفيع طوله L وعزم قصوره الذاتي I ووزن وحدة الطول منه q بني عند $x = 0$ حر عند $x = L$ يتحدد بفعل وزنه الذاتي . احسب القيمة الحرجة الى q مستعملا فترات فرعية عددها 1, 2 والاستيفاء . ان انحراف العمود y يتغير بمسألة القيم المميزة التالية : -

4.25 احسب اصغر تردد طبيعي للتذبذبات الحرة لعتبة طولها L تركز ببساطة مستعملا الاستيفاء وعدد من الفترات الفرعية هو 2, 3, 4
تلميح : - ان المعادلة التفاضلية لحركة العتبة هي

$$y^{iv} + \frac{qL}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) y'' - \frac{qL}{EI} \frac{1}{L} y' = 0;$$

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0.$$

افرض $k_n = q_n L^3 / EI$

$$\text{الجواب } k_1 = 4.0000; k_2 = 6.7624; k_{1,2} = 7.6832; k = 7.83.$$

(انظر مسائل الاهتزاز في الهندسة تأليف تيموشنكو ص ٣٣٢ . الناشران نوسترا فند)
علما بأن الجسوة الانثنائية EI والكثافة ρ ومساحة مقطع العتبة A عوض

$$y(x,t) = X(x) \sin \omega t$$

في هذه المعادلة ثم عبر عن ان العتبة بسيطة الاسناد عند نهايتها .

$$X(0) = X(L) = 0; \quad X''(0) = X''(L) = 0.$$

افرض $\text{Let } w = \omega L^2 / \sqrt{EI/\rho A}.$

$$\text{Ans. } w_2 = 8; w_3 = 9; w_4 = 9.3726; w_{2,3} = 9.8; w_{3,4} = 9.8516; \\ w_{2,3,4} = 9.8688.$$

الجواب

4.26 احسب اصغر تردد طبيعي للتذبذبات الحرة لعتبة طولها L مثبتة عند $x = 0$ وحررة

عند $x = L$ مستعملا فترات فرعية $n = 2$

تلميح : - راجع المسألة 4.25

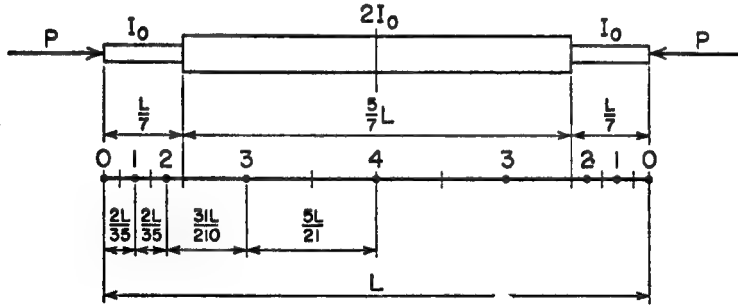
4.27 عين قيم y عند نقاط الارتكاز في الفترة (0,1) اذا علمت ان y تحقق مسألة القيم الحدودية $y'' + 2y = f(x)$ و $y(0) = y(1) = 0$ وان $f(x)$ تتعين بالجدول التالي :-

x	0	0.15	0.40	0.75	1.00
$f(x)$	0	16	30	20	0

استعمل تقريبات y'' اللامتماثلة ذات الخطأ من المرتبة h .

الجواب $y_1 = -1.8021; y_2 = -3.8260; y_3 = -2.7060.$

4.28 احسب حمل التحمل P للعتبة التي تتركز ببساطة الخاصة بالشكل 4.11 مستعملاً الفروق غير المتساوية من المرتبة h وبحسب التقسيمات المؤشرة (راجع المسألة 4.18.)



شكل 4.11

4.29 صفيحة دائرية مدرّجة كما في الشكل 4.12 مثبتة على طول حافتها تنحرف بتأثير

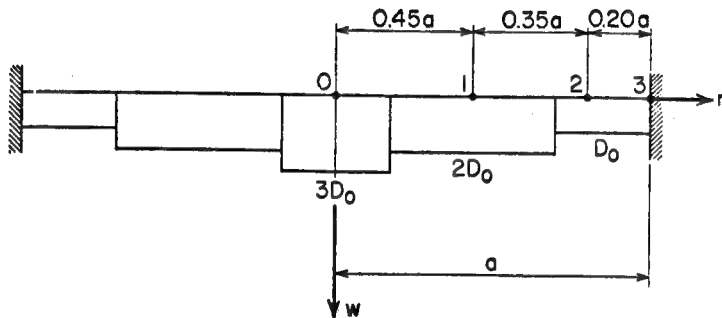
حمل منتظم قدره q .

(أ) عين ميلها $\phi(r)$ بموجب تقريبات ϕ'' اللامتماثلة والتي أخطاؤها من المرتبة h .

(انظر المسألة 4.8.)

(ب) عين انحراف المركز بالتكامل العددي

الجواب $\phi(0.45a) = 0.0163qa^3/D_0; \phi(0.8a) = 0.0177qa^3/D_0;$
 $w_0 = 0.0114qa^4/D_0.$



شكل 4-12

4.30 حل المسألة 4.29 في الحالة التي يكون ارتكاز الصفيحة بسيطاً (انظر المسألة 4.9.)

الفصل الخامس

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية

The Numerical Solution of Partial Differential Equations

5.1 تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية

Classification of Partial Differential Equations of the Second Order

لقد وجدت عمليات التكاملات العددية اوسع تطبيق لها في حلول المعادلات التفاضلية الجزئية . غير ان التكامل العددي للمعادلات الفروقية الجزئية الناتجة عنها تقود الى مسائل اساسية في التمام واستقرار الحل . حيث تواجه اختلافات اساسية في طبيعة الحلول الجوهرية تبعا لنوع المعادلة التفاضلية التي يراد حلها .

وحيث ان المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية هي ذات اهمية خاصة في كل من حقول انتشار الامواج . توصيل الحرارة . المرونة . الاهتزازات . نظرية الطبقة الحدودية ، الخ فان الفصل الحالي سيعالج . الى قدر كبير . هذا النوع من المعادلات مع ان مسائل عدة تشمل معادلات من مرتبة اعلى ستؤخذ بنظر الاعتبار .

دع معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية بدالة u مؤلفة من متغيرين مستقلين x, y تأخذ الصيغة :

$$A(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (5.1.1)$$

ان هذه المعادلة خطية في حدود المرتبة الثانية غير ان الحد

$$f\left(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

قد يكون خطيا او غير خطي . ففي الحالة الاولى تسمى المعادلة (5.1.1) خطية وفي الحالة التالية تسمى شبه خطية *quasi-linear*

وتصنف المعادلة (5.1.1) على انها ناقصة *elliptic* ، مكافئة *parabolic* ،

او زائدية *hyperbolic* في نقاط منطقة ما . R . تبعا لكون

$$B^2 - 4AC < 0$$

معادلة اهليلجية او ناقصة

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \text{معادلة مكافئة} \quad (5.1.2)$$

$$B^2 - 4AC > 0^* \quad \text{معادلة زائدية}$$

وحيث ان المعاملات C, B, A هي . بصورة عامة . دوال لمتغيرات مستقلة فان تصنيف المعادلة (5.1.1) قد يختلف في المناطق regions المختلفة من مجال domain تعريف المسألة .

[a] المعادلات الاهليلجية (المعادلات الناقصية)

ELLIPTIC EQUATIONS

ان المعادلة التفاضلية هي ناقصة في منطقة ما . اذا كان $B^2 - 4AC < 0$ في جميع نقاط المنطقة . ان الشروط الحدودية لهذا النوع من المعادلة قد تحدد قيمة الدالة لها . او مشتقها العمودي . او من مزيج combination خطي من الدالة ومشتقها العمودي في كل نقطة من الحدود المغلقة closed boundary للمنطقة R التي ينبغي ايجاد قيمة الحل $u(x,y)$ داخلها (الشكل 5.1a) . ان الشروط الحدودية المعطاة في كل نقطة من الحدود المغلقة تعرف بصورة فريدة حل مسألة القيم الحدودية (المحددة بالمعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية المرافقة لها) داخل المجال .

ان الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية بالفروق المحدودة يقود . بصورة عامة . الى منظومة من المعادلات الجبرية الخطية الانية بقيم الدالة في مراكز (نقاط ارتكاز) منطقة تعريف المسألة . ويمكن حل منظومة المعادلات هذه بالاساليب الموضحة في الفصل الاول .

معادلة لابلاس :

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5.1.3)$$

ومعادلة بواسان

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (5.1.4)$$

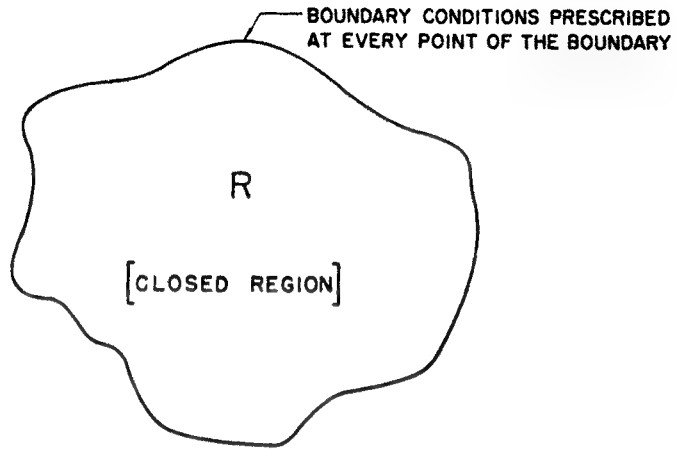
تصف المعادلة

ان اهمية هذا الصنف وثيقة الارتباط بنظرية المميزات

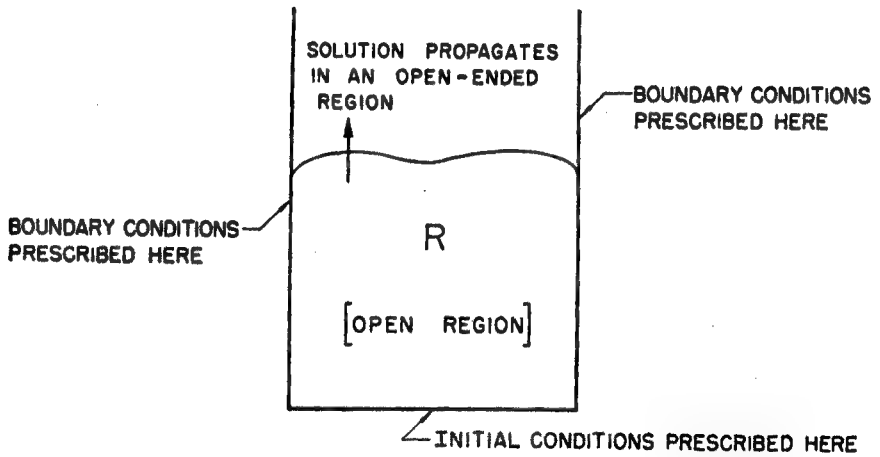
التفاضلية الجزئية بدلالة مميزاتها اي المحلات الهندسية (ملتقى النقاط) للانحطاعات المائلة في مشتقات حل ما (انظر . مثلاً بقطع المرجع من الكتاب الاصلي).

تسمى المعادلة زائدية في نقطة ما اذا ما وجد اتجاهان حقيقيان متميزان . وتسمى مكافئة اذا ما وجد اتجاه واحد حقيقي متميز متميز وناقصية او اهليلجية اذا ما خلت من اي اتجاه حقيقي متميز في تلك النقطة.

هما مثالان مهمان لهذا الصنف من المعادلات وسيناقش حلها العددي بالفروق المحدودة في الأقسام



(a) ELLIPTIC PROBLEM



(b) PARABOLIC OR HYPERBOLIC PROBLEM

شكل ١-٥

[b] المعادلات المكافئة

PARABOLIC EQUATIONS

تكون المعادلة التفاضلية مكافئة في منطقة R اذا كان $B^2 - 4AC = 0$ في كل نقاط المنطقة ان القيمة الابتدائية للدالة u في زمن ما t_0 . وان قيمة الدالة او مشتقتها او مزيج خطي مكون من الدالة ومشتقتها العمودية على الحدود هي الشروط الحدودية المطلوبة.

في مسائل من هذا النوع لا يعرف الحل ضمن مجال مغلق وانما ينتشر في مجال مفتوح منطلقا من الشروط المفروضة على حدود مفتوحة (الشكل 5.16 ان معادلة انتقال الحرارة لاحادية البعد هي من المعادلات المكافئة المهمة . وسيوضح حل هذا النوع من المسائل في القسم 5.1b

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.1.5)$$

[c] المعادلات الزائدية

HYPERBOLIC EQUATIONS

تعتبر المعادلة التفاضلية زائدية في منطقة R اذا كان $B^2 - 4AC > 0$ في جميع نقاط المنطقة . ان القيم الابتدائية للدالة u ومشتقتها الاولى بالنسبة للزمن بالاضافة الى قيمة الدالة او مشتقتها العمودية او مزيج خطي مكون من الدالة ومشتقتها العمودية على حدود منطقة التعريف هي الشروط الحدودية المطلوبة .

ان احدى المعادلات المهمة من هذا الصنف هي معادلة الامواج احادية البعد وسيناقش الحل

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.1.6)$$

العددي لمسائل من هذا النوع بالفروق المحددة في القسم 5.18

5.2 مؤثرات الفروق الجزئية في الأحداثيات الديكارتية

Partial Difference Operators in Cartesian Coordinates

ان تحويل معادلة تفاضلية جزئية الى معادلة الفروق الجزئية المناظرة يتم . اساسا . بنفس الطرق والمفكوكات المطورة في الفصول السابقة للمعادلات التفاضلية الاعتيادية .

حيث ان المشتقات الجزئية تقيم بنفس العملية النهائية limiting process المستعملة في المشتقات الاعتيادية مع الاحتفاظ بجميع المتغيرات . عدا واحدا ثابتة وهكذا فباستعمال \dots, D_y, D_z للدلالة على المشتقات الجزئية لدالة $z = f(x, y, \dots)$ بالنسبة الى x, y, \dots على التوالي يمكن الحصول على مفكوكات الفروق المركزية لـ D_y, D_z, \dots من المعادلة (2.7.16) مباشرة .

فمثلا اذا رمزت h للفاصلة spacing الثابتة بين نقاط الارتكاز على احداثي x ورمزت $\delta_x^n z_i$ لفرق z المركزي ذي الرتبة n عند i في اتجاه x

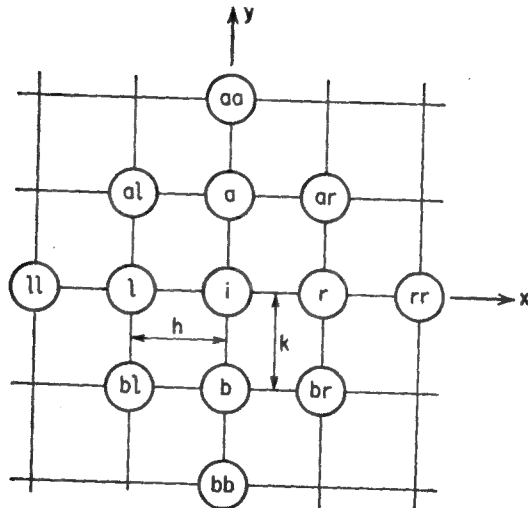
$$2hD_x z_i = z_r - z_l + 2\epsilon_{1x} \quad \left[\epsilon_{1x} = \mu \left(-\frac{\delta_x^2}{6} + \frac{\delta_x^5}{30} - \dots \right) z_i \right], \quad (5.2.1)$$

$$h^2 D_x^2 z_i = z_r - 2z_i + z_l + \epsilon_{2x} \quad \left[\epsilon_{2x} = \left(-\frac{\delta_x^4}{12} + \frac{\delta_x^6}{90} - \dots \right) z_i \right], \quad (5.2.2)$$

$$2h^3 D_x^3 z_i = z_{rr} - 2z_r + 2z_l - z_{ll} + 2\epsilon_{3x} \quad \left[\epsilon_{3x} = \mu \left(-\frac{\delta_x^5}{4} + \frac{7\delta_x^7}{120} - \dots \right) z_i \right], \quad (5.2.3)$$

$$h^4 D_x^4 z_i = z_{rrr} - 4z_r + 6z_i - 4z_l + z_{lll} + \epsilon_{4x} \quad \left[\epsilon_{4x} = \left(-\frac{\delta_x^6}{6} + \frac{7\delta_x^8}{240} - \dots \right) z_i \right], \quad (5.2.4)$$

وبالمثل اذا رمزت k للفواصل الثابتة لنقاط الارتكاز على احداثي z و $\delta_y^n z_i$ لفرق z النوني عند i باتجاه y واذا سميت نقاط الارتكاز المجاورة للنقطة z_i عموديا



كما في الشكل 5.2 ، تكون المشتقات الجزئية بالنسبة $z_{aa}, z_a, z_b,$

الى y

$$2kD_y z_i = z_a - z_b + 2\epsilon_{1y} \left[\epsilon_{1y} = \mu \left(-\frac{\delta_y^3}{6} + \frac{\delta_y^5}{30} - \dots \right) z_i \right], \quad (5.2.5)$$

$$k^2 D_y^2 z_i = z_a - 2z_i + z_b + \epsilon_{2y} \left[\epsilon_{2y} = \left(-\frac{\delta_y^4}{12} + \frac{\delta_y^6}{90} - \dots \right) z_i \right], \quad (5.2.6)$$

$$2k^3 D_y^3 z_i = z_{aa} - 2z_a + 2z_b - z_{bb} + 2\epsilon_{3y} \left[\epsilon_{3y} = \mu \left(-\frac{\delta_y^5}{4} + \frac{7\delta_y^7}{120} - \dots \right) z_i \right], \quad (5.2.7)$$

$$k^4 D_y^4 z_i = z_{aa} - 4z_a + 6z_i - 4z_b + z_{bb} + \epsilon_{4y} \left[\epsilon_{4y} = \left(-\frac{\delta_y^6}{6} + \frac{7\delta_y^8}{240} - \dots \right) z_i \right]. \quad (5.2.8)$$

وتقتنى عبارة expression مشتقة z الثاني المختلط بالنسبة الى D_{xy}, y, x باستعمال المؤثر الذي يعطي D_x على المؤثر الذي يعطي D_y أي بحاصل ضربهما $D_x D_y$ او

$$D_{xy} z_i = \frac{1}{2k} \left[\frac{1}{2h} (z_r - z_i)_a - \frac{1}{2h} (z_r - z_i)_b \right] + \frac{1}{2hk} \epsilon_{1,xy},$$

$$4hk D_{xy} z_i = z_{ar} - z_{al} - z_{br} + z_{bl} + 2\epsilon_{1,xy} \left[-\frac{1}{8}(\mu\delta_x\mu\delta_y^3 + \mu\delta_y\mu\delta_x^3) + \dots \right] z_i. \quad (5.2.9)$$

بالمثل فان المشتقة الرابعة المختلطة $\partial^4 z / \partial x^2 \partial y^2 \equiv D_{xyyy}$ هي حاصل ضرب D_x^2, D_y^2 التائيري .

$$\begin{aligned} h^2 k^2 D_{xyyy} z_i &= (z_r - 2z_i + z_l)_a - 2(z_r - 2z_i + z_l)_i \\ &\quad + (z_r - 2z_i + z_l)_b + \epsilon_{2,xy} \\ &= (z_{ar} + z_{al} + z_{br} + z_{bl}) - 2(z_a + z_b + z_r + z_l) + 4z_i \\ &\quad + \epsilon_{2,xy} \left[\epsilon_{2,xy} = \left(-\frac{1}{12}(\delta_x^2 \delta_y^4 + \delta_y^2 \delta_x^4) + \dots \right) z_i \right]. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

المؤثر اللا بلاسي (او التوافقي) ∇^{2*} Laplacian (or harmonic) operator

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = D_x^2 + D_y^2$$

(٥) ينبغي عدم خلط المؤثر ∇^2 بالفرق الخلفي (التراجعي) الثاني

يصبح بالمعادلات (5.2.2) و (5.2.6) ولمشك مستطيل ذي فتحات ابعادها h , k

$$h^2 k^2 \nabla^2 z_i = k^2 (z_r - 2z_i + z_l) + h^2 (z_a - 2z_i + z_b) + h^2 \epsilon_{2x} + h^2 \epsilon_{2y} \quad (5.2.11)$$

وللحالة الخاصة حيث يتساوى ابعاد نقاط الارتكاز في الاتجاهين k و h اي لمشك مربع التفتحة

$$h^2 \nabla^2 z_i = z_a + z_b + z_r + z_l - 4z_i + \epsilon_{2x} + \epsilon_{2y}, \quad (5.2.12)$$

حيث ϵ_{2x} و ϵ_{2y} معطيان بالمعادلتين (5.2.2) و (5.2.6) على التوالي . اما المؤثر

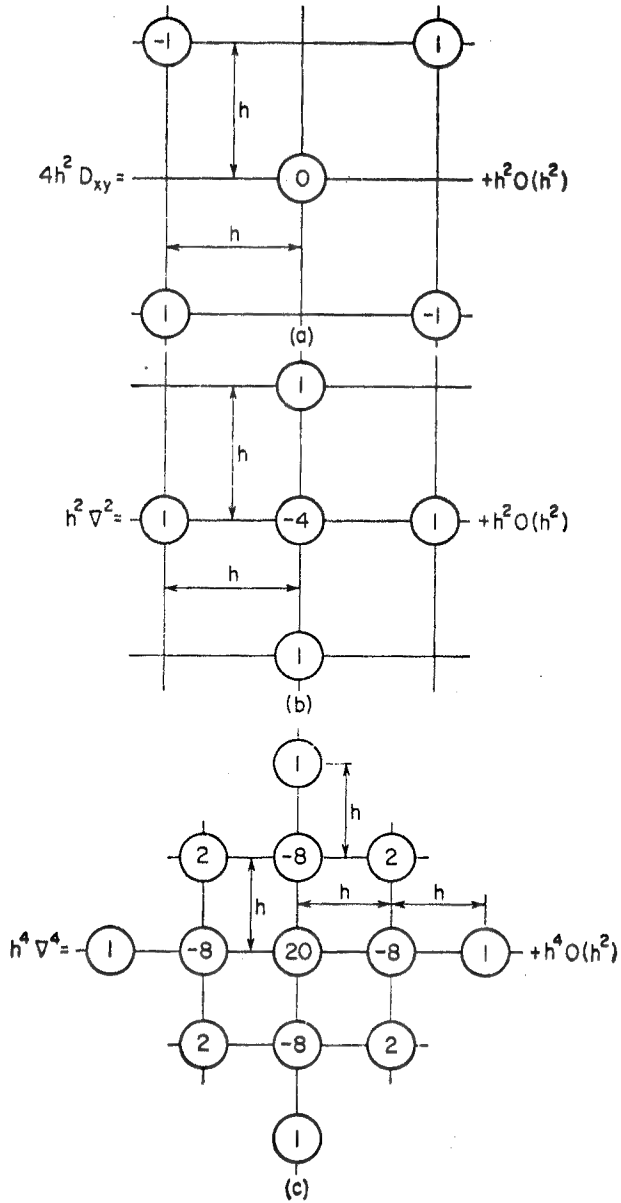
$$\nabla^4 \equiv \nabla^2(\nabla^2) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

فيصح لمشك مربع :

$$\begin{aligned} h^4 \nabla^4 z_i &= h^4 \nabla^2(\nabla^2 z_i) = h^4 [\nabla^2 z_a + \nabla^2 z_b + \nabla^2 z_r + \nabla^2 z_l - 4\nabla^2 z_i] \\ &= (z_{aa} + z_{bb} + z_{rr} + z_{ll}) + 2(z_{al} + z_{ar} + z_{br} + z_{bl}) \\ &\quad - 8(z_a + z_b + z_r + z_l) + 20z_i + \epsilon, \quad (5.2.13) \end{aligned}$$

نحصل على ϵ بواسطة $\epsilon_{4,xy}, \epsilon_{4y}, \epsilon_{4z}$

وتمثل المؤثرات الجزئية D_{xy} و ∇^2 و ∇^4 لمشك مربع بكل يسرجزيئات الاشكال 5.3a و 5.3c , 5.3b على التوالي

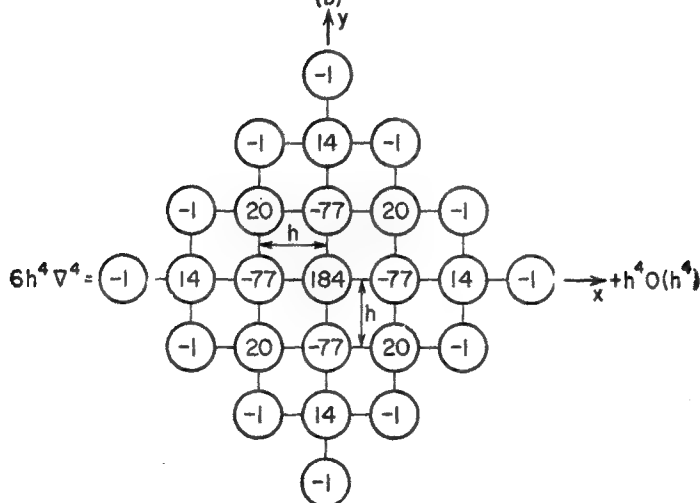
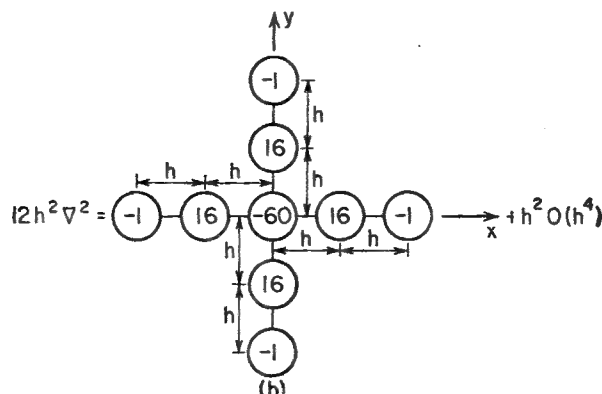
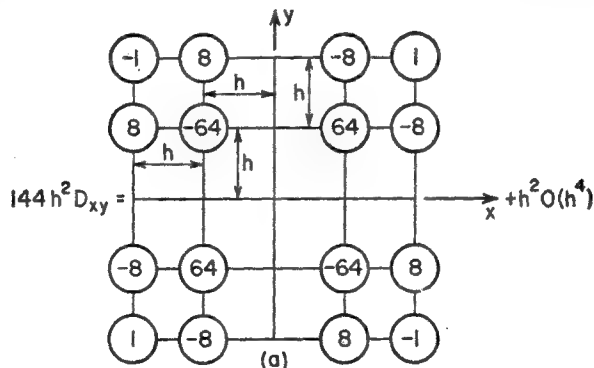


شكل (3-5) المؤثرات الجزئية الفروق المركبة

وبواسطة مؤثرات الفروق المركبة في الشكل 2.8b. نحصل بالمثل على مؤثرات الجزئيات في الشكل 5.4 بخطأ من مرتبة h^4 والتي يمكن استعمالها للحصول على حلول أدق.

وتقتني المؤثرات الجانية Lateral اعتماداً على الفروق الامامية او الخلفية (التراجعية)
 بالطريقة نفسها .

نقتني المؤثرات الثلاثية البعد بأسلوب مماثل تماماً وقد تم استعمالها في مسائل المرونة وانتقال
 الحرارة



شكل (٤-٥) مؤثرات من المرتبة الثانية

5.3 التكامل المزدوج العددي Numerical Double Integration

قانون شبه المنحرف

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy \quad (5.3.1) \quad \text{يمكن تعميم التكامل المزدوج}$$

المنسط على مستطيل $x = a, x = b, y = c, y = d$, عددياً بتكاملين متتاليين

باتجاه x ثم باتجاه y وباستعمال قانون شبه المنحرف الوارد في القسم 2.8a

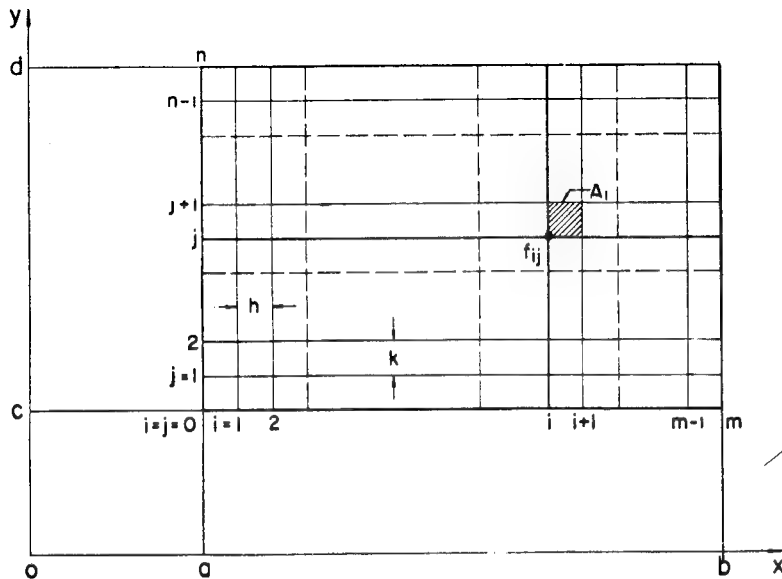
لهذا الغرض قسم المربع $(a,b), (c,d)$ الى عدد $m \cdot n$ من المربعات ذات ابعاد
ثم خذ بنظر الاعتبار القيم f_{ij} للدالة f في نقاط
الارتكاز (الشكل 5.5).
 $h = (b - a)/m, k = (d - c)/n$

$$x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m);$$

$$y_j = c + jk \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n).$$

ان القيمة A_1 للتكامل الممتد على مستطيل واحد ذي اطراف h, k زاويته السفلى اليسرى

عند

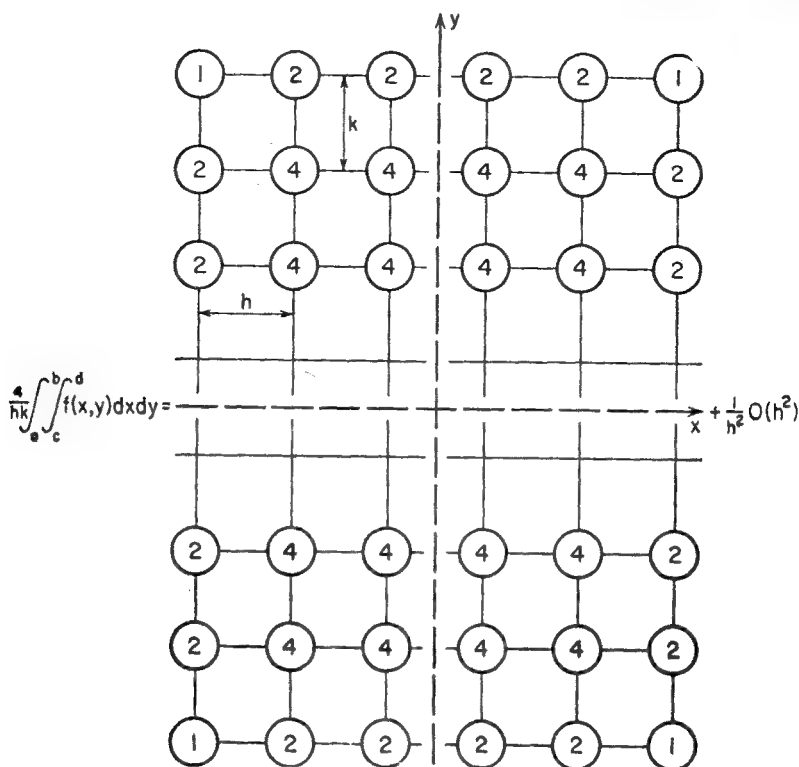


(5-5)

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{y_i}^{y_{i+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y) dx \doteq \int_{y_i}^{y_{i+1}} \left\{ \frac{h}{2} [f_i(y) + f_{i+1}(y)] \right\} dy \\
&\doteq \frac{h}{2} \left[\frac{k}{2} (f_{i,j} + f_{i,j+1}) + \frac{k}{2} (f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}) \right] \\
&= \frac{hk}{4} [f_{i,j} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}].
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

بإضافة قيم A_1 المناظرة لكل مستطيل في المجال وملاحظة ان كل قيمة ارتكاز داخلية تعد اربع مرات وكل قيمة ارتكاز حدودية تعد مرتين فيما عدا قيم الزوايا . حيث تعد مرة واحدة فقط . يمكننا تمثيل قيمة V بالمؤثر . او الجزئية في الشكل 5.6 .

ولتقييم الخطأ في مؤثر التكامل المزدوج بقانون شبه المنحرف . ينبغي ان نتذكر بان الخطأ لتكامل منفرد بقانون شبه المنحرف هو مرتبة h^2 | المعادلة (2.11.11)



شكل (٦-٥) قاعدة شبه المنحرف

لذلك فان مساحة كل مقطع من الحجم V الحاصل بواسطة مستو مواز للمستوى z عند $y = y_i$ فيها خطأ من مرتبة h^2 .

$$A(y_i) = \int_a^b f(x, y_i) dx = A_i + K_i h^2. \quad (a)$$

وبواسطة المعادلة (a) وقانون شبه المنحرف المطبق باتجاه y يصبح التكامل المزدوج

$$V = k(\frac{1}{2}A_0 + A_1 + \dots + A_{n-1} + \frac{1}{2}A_n) + k(\frac{1}{2}K_0 + K_1 + \dots + K_{n-1} + \frac{1}{2}K_n)h^2 + K'h^2,$$

حيث يمثل الحد الاخير الخطأ الناشئ عن المكاملة باتجاه احدائي y وبتعويض $(d - c)/n$ بدلاً عن k في الحد الثاني من المعادلة وجعل

$$\bar{K} = \frac{(d - c)}{n} \left(\frac{1}{2} K_0 + K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1} + \frac{1}{2} K_n \right),$$

نرى ان الخطأ في التكامل المزدوج هو على نمط

$$\epsilon_t = \bar{K}h^2 + K'h^2$$

او عند اطلاق α على النسبة k/h

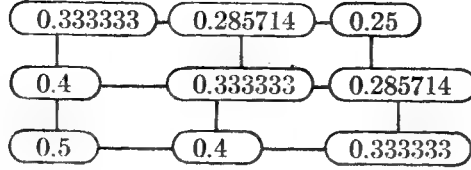
$$\epsilon_t = (\bar{K} + \alpha^2 K')h^2. \quad (5.3.3)$$

تظهر المعادلة (5.3.3) ان الخطأ في قانون شبه المنحرف للتكامل المزدوج هو من مرتبة h^2 ولذلك فان معادلات استيفاء h^2 (ذات خطأ من مرتبة h^2) قد تستخدم لتحسين نتائج التكامل العددية .

سيطبق قانون شبه المنحرف لايجاد قيمة المتكاملة .

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{dx dy}{x + y} \\ &= \int_1^2 \left[\ln(x + y) \right]_1^2 dx = \int_1^2 [\ln(x + 2) - \ln(x + 1)] dx \\ &= \left[(x + 2)[\ln(x + 2) - 1] - (x + 1)[\ln(x + 1) - 1] \right]_1^2 \\ &= \ln \frac{1024}{729} = \ln 1.4046639 = 0.339798. \end{aligned} \quad (b)$$

باستعمال $n = 2$ و $h = k = 0.5$ تكون قيم الدالة $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$ عند نقاط الارتكاز في حقل مجال التكاملة



وبذلك تكون قيمة V التقريبية كما هي معطاة في مؤثر الشكل 5.6 وباستعمال اربع ارقام ذات دلالة معنوية .

$$V_{1,2} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{4} \{ (0.3333 + 0.5 + 0.3333 + 0.25) + 2(0.4 + 0.4 + 0.2857 + 0.2857) + 4(0.3333) \} = 0.3433$$

حيث مقدار الخطأ في هذه القيمة -1.0 بالمائة وعند استعمال $n = 4$ و $h = k = 0.25$ نحصل بنفس الطريقة على

$$V_{1,4} = 0.3406,$$

بخطأ مقداره -0.24 بالمائة . وعند استعمال استيفاء h^2 بالمعاملات $\alpha_1 = 0.3333$ و $\alpha_2 = 1.3333$ من الجدول 2.12 والمناظرة للنسبة $n_2/n_1 = 2$ نحصل على القيمة

$$V_1 \Big|_{2,4} = 1.3333 \cdot 0.3406 - 0.3333 \cdot 0.3433 = 0.3397,$$

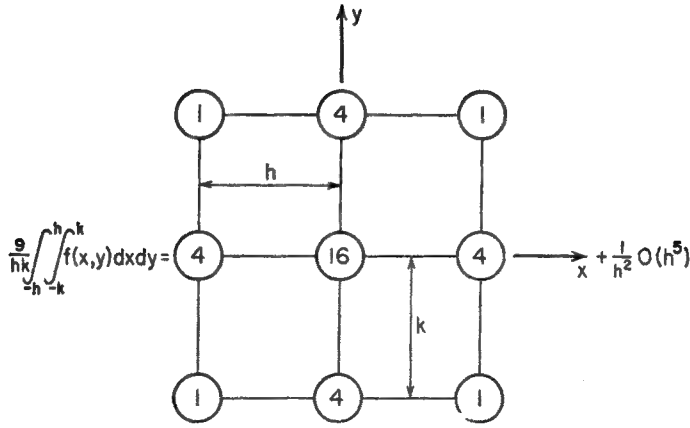
بخطأ مقداره $+0.03$ بالمائة .

[b] قانون سمبسون الثنائي

باستعمالين متتاليين لقانون سمبسون الثنائي (المعادلة 2.11.4) باتجاهي x و y تصبح قيمة التكامل الثنائي V الممتد الى اربع مستطيلات اطرافها h و k ملتقية عند $x_{i,j}$

$$\begin{aligned} B_4 &= \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} dy \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \doteq \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \frac{h}{3} [f_{i-1}(y) + 4f_i(y) + f_{i+1}(y)] dy \\ &\doteq \frac{hk}{9} [f_{i-1,j-1} + f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j+1} \\ &\quad + 4(f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j} + f_{i+1,j}) + 16f_{i,j}] \quad (5.3.4) \end{aligned}$$

ان المؤثر B_4 يظهر في جزيئة الشكل (٧-٥)



5.7. قاعدة سمبسون للمربعات

5.8 باضافة قيم B_4 المناظرة لكل مستطيل في المجال نحصل على المؤثر والجزيئة في الشكل 5.8 وعملية مشابهة لتلك المستعملة في الجزء 4 من هذا القسم . يكون من السهل اثبات كون الخطأ في قانون سمبسون التثني للتكامل الثنائي من مرتبة h^4 ولذلك فان استيفاءات h^4 (البند 2 * 3) قد تستعمل مع قانون سمبسون ثنائي البعد .

ان استعمال قانون سمبسون التثني على التكامل (b) من هذا القسم تعطي إلى $n = 2$

$$V_{s,2} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{9} [0.5 + 0.333333 + 0.25 + 0.333333 + 4(0.4 + 0.4 + 0.285714 + 0.285714) + 16 \cdot 0.333333] = 0.339881,$$

بخطأ مقداره - 0.0024 بالمائة .

ان اياً من قواعد التكامل البسيط الواردة في القسم 2.10 و 2.11 قد تستعمل بطريقة مماثلة لاستقافه قوانين تكاملات ثنائية .

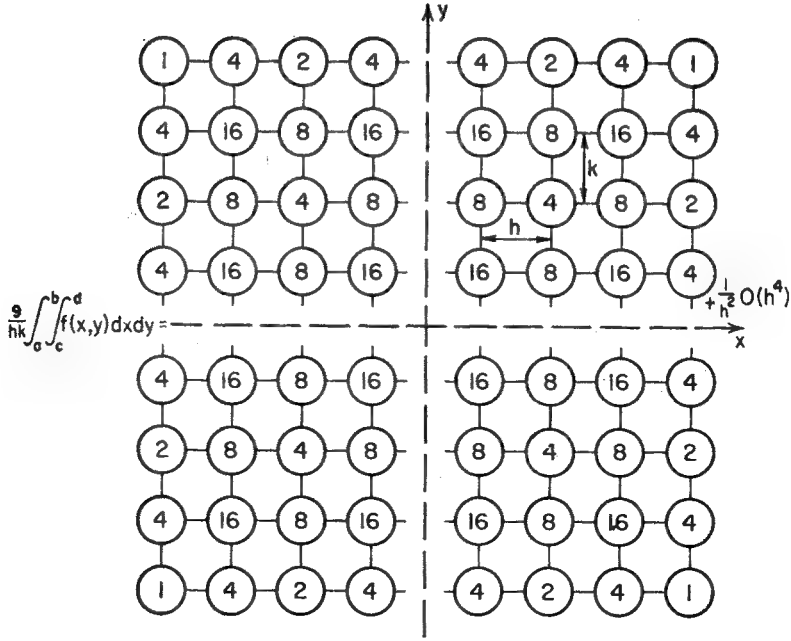


Fig. 5.8. Simpson's $\frac{1}{3}$ rule.

شكل 58 قاعدة سمبسون

[c] تكاملات ذات حدود عليا متغيرة

$$V = \int_c^d dy \int_a^{\phi(y)} f(x,y) dx, \quad (5.3.5) \quad \text{ان تقييم التكامل}$$

والتي تمثل $\phi(y)$ فيها دالة ذات قيمة واحد single-valued في y . قد يقتني باداء التكامل الاول بين a و $x_j = \phi(y_j)$ بموجب قانون الشبه المنحرف ولعدد m من الفترات (الشكل، 5.9 :

$$A_j = \int_a^{\phi(y_j)} f(x,y_j) dx \\ \doteq h_m [\frac{1}{2}f_0(y_j) + f_1(y_j) + f_2(y_j) + \dots + f_{m-1}(y_j) + \frac{1}{2}f_m(y_j)], \quad (5.3.6)$$

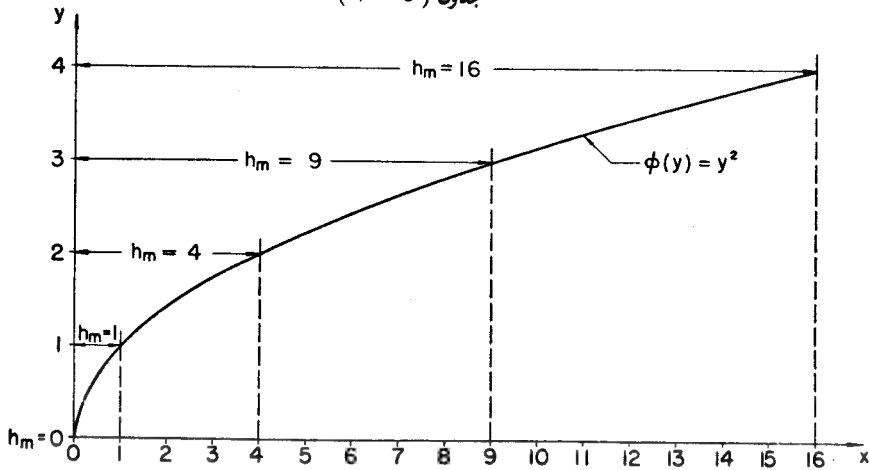
وباستعمال $n = 4$ لذا $k_n = 1$ وباستعمال $m = 1$ ولذا h_m كما مبين في الجدول 5.1 ،
 نحصل على $V = 181.0$ بخطأ مقداره -8.77 بالمائة (الشكل 5.10) وباستعمال $k_n = 0.5$
 $V = 170.75$ بخطأ مقداره -2.61 بالمائة .

Table 5.1

$f(x,y) = x_i + y_i$						h_m	$2A_i$	m_i	$2m_i A_i$
$x_i \backslash y_i$	0	1	4	9	16				
0	0					0	0	1/2	0
1	1	2				1	$1(1+2)$	1	3
2	2	3	6			4	$4(2+6)$	1	32
3	3	4	7	12		9	$9(3+12)$	1	135
4	4	5	8	13	20	16	$16(4+20)$	1/2	192

$$V = \sum m_i A_i = 181; \quad \sum 2m_i A_i = 362.$$

جدول (٥ - ١)



شكل (٥ - ١٠)

كلما كان تقسيم الفترات $\phi(y_i) - a$ و $d - c$ الى عدد زوجي من الشرائح ميسوراً فان التكامل قد ينجز بقانون سمبسون التلثي . عندما يكون حدا التكامل الاعلى والادنى ، في اتجاه دالة في y

$$V = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y) dx, \quad (5.3.10)$$

فان شيئاً من العملية لا يتغير سوى ايجاد قيمة h_m الذي يصبح

$$h_m = \frac{\phi_2(y_j) - \phi_1(y_j)}{m} \quad (5.3.11)$$

جدول (٥-٢)

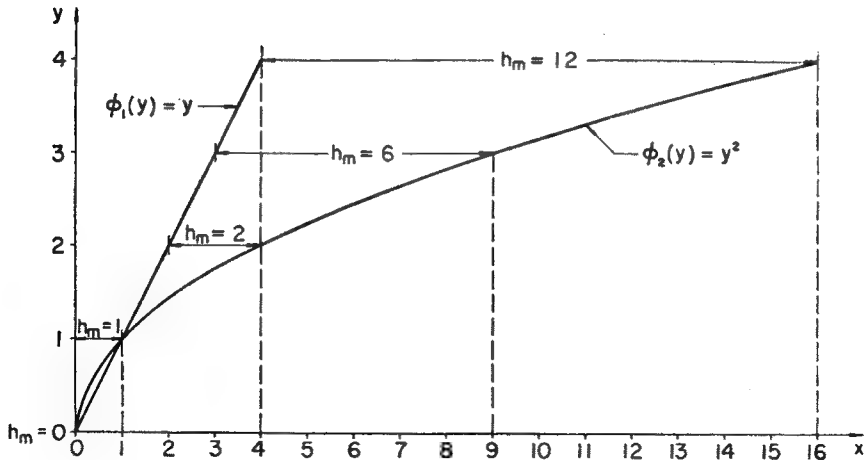
j	h_m	$2A_j$	m_j	$2m_j A_j$
0	0	0	1/2	0
1	0	0	1	0
2	2	$2(4 + 6)$	1	20
3	6	$6(6 + 12)$	1	108
4	12	$12(8 + 20)$	1/2	168

$$V = 148 \text{ (} e = -11 \% \text{)}; \quad \Sigma 2m_j A_j = 296.$$

وبوضح الجدول 5.2 والشكل 5.11 ايجاد قيمة التكامل التالي :

$$V = \int_0^4 dy \int_y^{y^2} (x + y) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (y^4 + 2y^3 - 3y^2) dy = 134.4$$

باستعمال $m = 1, k_n = 1$



شكل (٥-١١)

5.4 حل معادلة لابلاس بالمعاودة Iteration

ان مجموعة كبيرة من المسائل الفيزيائية الثنائية البعد تحكم بما يسمى معادلة لابلاس

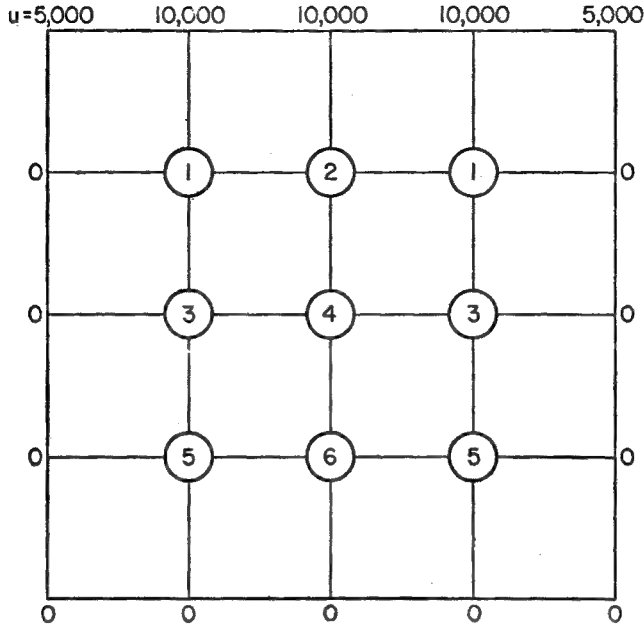
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

بالشروط الحدودية المناسبة . ومن هذه مسألة الحرارة المطردة (steady-state) وفي الحقيقة . فإنه يمكن البرهنة على أن درجة الحرارة $u(x,y)$ في جسم ثنائي البعد (صفيحة رقيقة معزولة ، أو اسطوانة مالا نهائية الطول) تفي بالمعادلة (5.4.1) اينما كانت u مستقلة عن الزمن .

وكمثال على حل معادلة لابلاس بالطرق العددية ، خذ مسألة ايجاد درجات حرارة الحالة المطردة u في نقاط الأرتكاز في مشبك مربع ذي فتحة (عين) h في صفيحة مربعة ، وقيمة أضلاعها L ، معزولة تماماً . بالتعويض عن $\nabla^2 u$ في المعادلة (5.4.1) بمؤثر الشكل (5.3 b) وباستعمال رموز الشكل 5.2 بالاشارة الى نقاط الأرتكاز ، تصبح المعادلة (5.4.1) معادلة لابلاس الفروقية : *Laplacian difference equation*.

$$u_o + u_b + u_r + u_l - 4u_i = 0. \quad (5.4.2)$$

ويجعل $h = -\frac{L}{4}$ ودرجات الحرارة على حدود الصفيحة كما هي معطاة في الشكل (5.12) وترقيم نقاط الأرتكاز كما في الشكل تؤدي المعادلة (5.4.2) الى منظومة ست معادلات خطية :



شكل (٢١-٥)

Point	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	c
1	-4	1	1				-10,000
2	2	-4		1			-10,000
3	1		-4	1	1		0
4		1	2	-4		1	0
5			1		-4	1	0
6				1	2	-4	0

(a)

منظومة المعادلات الخطية

وجدورها مقيمة بطريقة كاوس Gauss' وهي

$$\begin{aligned} u_1 &= 4286; & u_2 &= 5268; & u_3 &= 1875; \\ u_4 &= 2500; & u_5 &= 714; & u_6 &= 982. \end{aligned} \quad (b)$$

ان معادلات لابلاس قد تم حلها بالمعادلة أيضاً (البند 1.12) بحل المعادلة (5.4.2)

لقيمة u_i :

$$u_i = \frac{1}{4}(u_a + u_b + u_r + u_l), \quad (5.4.3)$$

ومنها يتبين أن درجة الحرارة عند " تساوي متوسط درجات الحرارة في النقاط المجاورة الأربعة المتعامدة معها من المشبك . وانطلاقاً من أية قيم متوقعة لدرجة الحرارة في نقاط الأرتكاز ثم التوسط (أخذ معدل) المتوالي لدرجة الحرارة في كل أربعة نقاط متعامدة " . يمكن الحصول على القيم المعادة u_i بكل سهولة . ولغرض الحصول على التمام سريع

Table 5.3

n	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
0	4375	5312	1875	2500	625	938
1	4296	5273	1855	2480	698	969
2	4282	5261	1865	2490	708	976
3	4281	5263	1869	2494	711	979
4	4283	5265	1872	2497	712	980
...
9	4286	5268	1875	2500	714	982

جدول (٥-٣)

لعملية المعادة . والتي تعرف بطريقة (Liebmann) في هذه الحالة بالذات . يكون من الضروري الانطلاق بقيم ابتداء جيدة . وتقتني القيم الجيدة عادة بواسطة مشبك حجم فتحاته اكبر . وهكذا باستعمال $h = L/2$ (تصبح قيمة الابتداء في مركز الصفيحة بالمعادلة (5.4.3)

$$u_4^{(0)} = \frac{1}{4}(10,000 + 0 + 0 + 0) = 2,500.$$

وبوجود قيمة في المركز يمكننا الآن اقتناء قيم النقاط ٥, ١ . بأخذ معدل النقاط الأربع المجاورة قطريا ووترياً لها . حيث أن اوتاد مشبك مربع هي الأخرى مشبك مربع . كما أن المؤثر ∇^2 هو لا متغير (invariant) بالنسبة الى دوران المحاور الاحداثيات وهكذا ..

$$u_1^{(0)} = \frac{1}{4}(10,000 + 2,500 + 0 + 5,000) = 4,375;$$

$$u_6^{(0)} = \frac{1}{4}(0 + 2,500 + 0 + 0) = 625.$$

وتقتني قيم الابتداء في النقاط 2, 3, 6 بأخذ المعدل للنقاط المجاورة لها في المشبك الأصلي :

$$u_2^{(0)} = \frac{1}{4}(4,375 + 10,000 + 4,375 + 2,500) = 5,312;$$

$$u_3^{(0)} = \frac{1}{4}(0 + 4,375 + 2,500 + 625) = 1,875;$$

$$u_6^{(0)} = \frac{1}{4}(625 + 2,500 + 625 + 0) = 938.$$

وبين الجدول 5.3 القيم المتوالية لدرجة الحرارة u_i المقتناة بطريقة ليتمان والتي تطابق الى آخر رقم . الحل بطريقة كاوس .

5.5 حل معادلة لابلاس بالارخاء Relaxation

ان حل معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$ وبالباقة الأهمية في نظرية المجالات (الكهرومغناطيسية التوصيل الحراري . المرونة .. الخ) مسوراقتناء بالارخاء أيضاً البند 1.13

جدول (٤-٥)

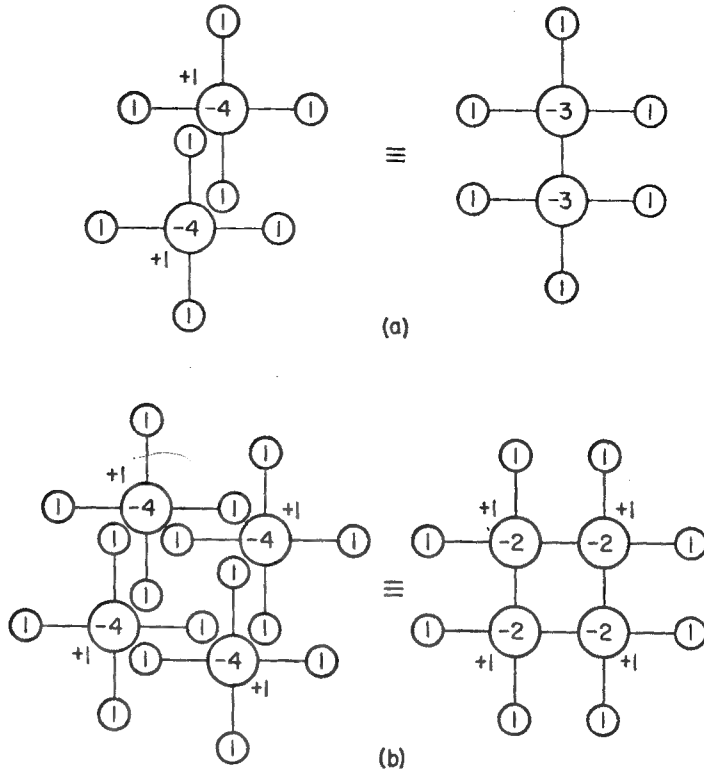
①		②	
4375	-318	5312	2
-80	7	-40	-158
-8	-33	-4	2
-1	1	5268	-14
4286	-5		2
	-1		
③		④	
1875	0	2500	0
	-80		-40
	-8		-4
	-1		
⑤		⑥	
625	318	938	-2
80	7	40	158
8	-33	4	-2
1	1	982	14
714	5		-2
	1		

ان الباقي (residual) R_i في المؤثر الابلاسي الفروقي (5.4.2) بسبب قيم u_i التقريبية

$$u_a + u_b + u_r + u_l - 4u_i = R_i,$$

يظهر أن تغيراً مقداره δu_i في قيمة الارتكاز u_i سيقلل R_i بمقدار $4\delta u_i$ بينما يزيد قيمه البواقي المجاورة الأربعة R بمقدار δu_i . وبهذا فإن مؤثر ∇^2 في الشكل 5.3b يمثل أيضاً تغير البواقي عند i, l, r, b, a الناتج عن تغير u_i بمقدار وحدة واحدة. ويسمى نمط الأرخاء *relaxation pattern* تشمل عمليات الأرخاء اذن مضروباً (multipliers) تكاملية صحيحة ومتساوية في كل نقطة ارتكاز ويمكن اداؤها دون الاستعانة بآلة حاسبة.

يبين الجدول 5.4 ارخاء المعادلات (a) الستة من البند 5.4 وانطلاقاً من قيم ابتداء مأخوذة من السطر الأول من الجدول 5.3. يختزل اكبر متبق بصورة نظامية الى صفر في كل خطوة. وحيث أن درجات الحرارة متناظرة حول المحور الوسطي للصفحة. فإن ستة نقاط ارتكاز فقط استعملت في الأرخاء. كما ينبغي ملاحظة أنه نتيجة للتناظر (شكل 5.12) فإن تغيراً مقداره δu عند النقاط 1, 3, 5, سيزيد المتبقيات عند 2, 4, 6 بمقدار $2\delta u$. في مسائل من هذا النوع يكون الأرخاء غالباً أسهل وأسرع طريقة للحل.



شكل 5.13 Figure

1.13 Block relaxation انظر البند يمكن بكفوء استعمال الارحاء الكتلي

في حل معادلة لابلاس . ولغرض الحصول على نمط الارحاء الناتج من وحدة تغير في قيمتي نقطتي ارتكاز متجاورتين . يضاف نمطا الارحاء الناجمان عن كل تغير كما في الشكل 5.13a ويعطي الشكل 5.13b . بالمثل . نمط الارحاء لاربع وحدات تغير في اربع زوايا متجاورة في العين . ويظهر من هذه الاشكال ان انماط الارحاء الكتلي لها معاملات تساوي واحد في النقاط الخارجية للمجموعة . ومعاملات تساوي القيمة السالبة لعدد المستقيمات التي تصل النقطة الداخلية بالنقاط الخارجية في جميع النقاط الداخلية .

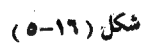
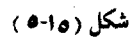
	(10)		(20)	
(30)	0	40	0	50
	36	-32	36	-22
	-6	-22	-5	-15
	-1	-3	-1	-21
		-1		-23
		-1		-3
	-290	-10	-300	-1
	-3	-2	-3	-3
	2870	20	3000	0
	2875	0	3000	0
	0	110	0	90
(50)	36	38	36	18
	10	-3	7	28
		-3	-1	-10
		-1		-25
		-3		-22
		-1		-3
		-1		-1
	-450	-10	-410	10
	-3	-3	-3	-2
	4500	0	4130	-20
	4500	0	4128	0
	(60)		(50)	

شكل (٥-٤١)

ويستحصل في الشكل 5.14 ارحاء معادلة لابلاس لدالة " بالشروط الحدودية المعطاة انطلاقاً من قيم الابتداء " صفرية . ان مجمل البواقي الابتدائية هو $40 + 50 + 90 + 110 = 290$

يكون مجسوع معامل الارحاء من الشكل 5.13b هو $4(-2) = -8$ لذلك فان تغييرا كتليا ابتدائيا $36 \Rightarrow (-8)/(-290)$ يدخل على النقاط الداخلية الاربع ثم يتم ارحاء اكبر باقي في كل خطوة لاحقة . ويقتني رقمان اضافيان بعد دورتين منفصلتين من تدقيق البواقي

ويمكن انجاز هذا باستعمال شبكة (فتحة مشبك) بعدها يساوي $h/2$



في تلك المنطقة من المجال واقتناء قيم ابتدائية بالمؤثرات القطرية diagonal وهكذا لدى الحصول على قيم « الدوائر السوداء » في الشكل 5.15 . يمكن حساب قيم « الدوائر البيضاء » التكميلية والقيم المتصلة بالمؤثرات القطرية . في حين تقيم نقاط \times بالمؤثرات المتصلة النظامية . ثم يقتني الحل على الشبكة المدرجة الجديدة بفاصلة h في كل مكان مكان فاصلة $h/2$ في المنطقة $ABCD$. وهذا العمل يكون من الضروري فقط ان نلاحظ ان تغيرا δu في نقاط مثل F, E سيدخل تغيرا في بواقي كلتا الشبكتين . ولذلك فان نمط الارخاء في النقاط F, E هو ذلك المبين في الشكل 5.16 .

5.6 حل معادلة بواسان بالارخاء

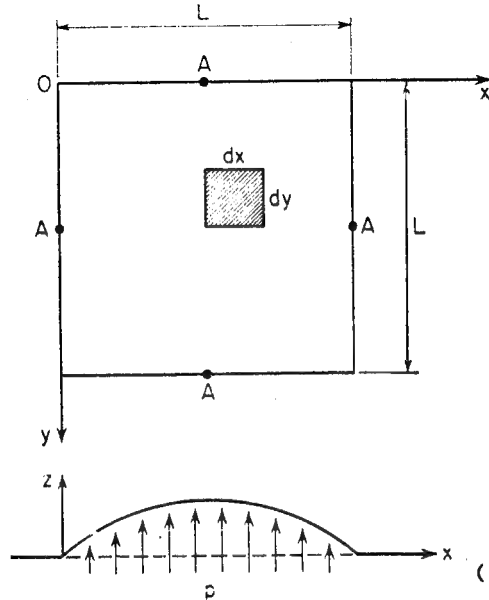
Solution of Poisson's Equation by Relaxation

ثمة معادلة أخرى أساسية في الفيزياء الرياضية هي معادلة بواسان

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y),$$

التي تتحكم في الظواهر في الكهرباء . المغناطيسية . المرونة . الخ . وهي ميسورة الحل بالارخاء وستطبق هنا على مسألة في المرونة .

خذ غشاء membrane قابل للانثناء تماما perfectly flexible ممتد بالتساوي على فتحة أفقية مربعة ضلعها L . طفيف الانحراف deflection (الى أعلى او أسفل) تحت تأثير ضغط ثابت p (الشكل 5.17) اجعل s يكون الشد tension الثابت لكل وحدة طول في الغشاء . z هو الاحداثي فوق مستوى الفتحة الذي يؤخذ كستوى x, y



شكل (١٧-٥)

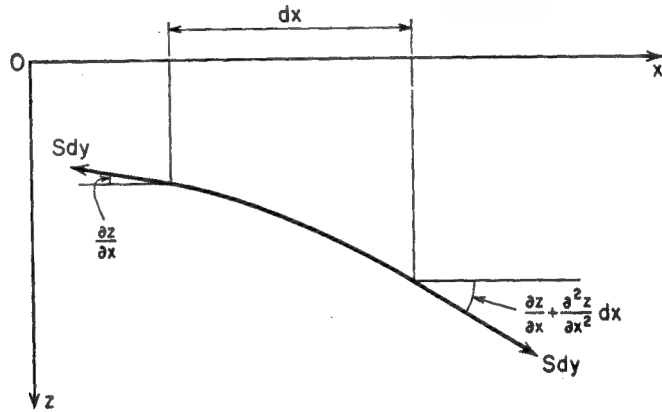
ان القوى المؤثرة على عنصر $dx dy$ من الغشاء هي (1) الضغط $p dx dy$, (2) محصلة الشد S . العامل على الضلعين dy , (3) محصلة الشد العامل على الضلعين dx . ويعتبر وزن الغشاء تافها (قابلا للإهمال). بافتراض انحدار الغشاء في كل مكان صغير جدا (الشكل 5.18) فان محصلة الشد S الشاقولية العاملة على الضلعين dy من العنصر تساوي

$$-S dy \frac{\partial z}{\partial x} + S dy \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} dx \right) = S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy.$$

وبالمثل . فان محصلة الشد على الضلعين dx تساوي

$$-S dx \frac{\partial z}{\partial y} + S dx \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy.$$

وعليه فان المعادلة التفاضلية لتوازن equilibrium الغشاء في اتجاه z تؤول . بعد



شكل (٥-١٨)

القسمة على $S dx dy$ الى

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{p}{S} = 0, \quad (5.6.1)$$

وهي معادلة بواسان وفيها $f(x,y) = -p/S$ ثابتا. ان الشروط الحدودية تتطلب كون

$$z = 0 \quad \text{على الحدود} \quad (5.6.2)$$

للحصول على حل عددي لمسألة الغشاء بصيغة لا بعدية non-dimensional اجعل :

$$x = \xi L; \quad y = \eta L, \quad z(x,y) = \frac{pL^2}{S} \phi(\xi, \eta) \quad (5.6.3)$$

في المعادلتين (5.6.1) ، (5.6.2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{p}{S} = \frac{pL^2}{S} \left[\frac{\partial^2 \phi}{L^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{L^2 \partial \eta^2} \right] + \frac{p}{S} = 0;$$

$$\frac{pL^2}{S} \phi = 0 \quad \text{على الحدود}$$

وهكذا نجد ان الدالة ϕ هي حل مسألة القيم الحدودية

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + 1 = 0; \quad (5.6.4)$$

$$\phi(0, \eta) = \phi(1, \eta) = \phi(\xi, 0) = \phi(\xi, 1) = 0.$$

لغرض تحويل أولى المعادلتين (5.6.4) الى معادلة فروقية باستعمال مشبك مربع ذو فتحة

5.3b $h = 1/n$ تضرب حدود المعادلة بالكمية $h^2 = 1/n^2$ ، ثم نعوض جزئيات الشكل $h^2 \nabla^2$ فان المعادلات الفروقية :

$$\phi_a + \phi_b + \phi_r + \phi_l - 4\phi_i + \frac{1}{n^2} = 0, \quad (5.6.5)$$

مجتمعة مع الشروط الحدودية (5.6.4) ، هي المعادلات العددية لمسألة الغشاء. حالما يتم الحصول على قيم ϕ ، يمكن حساب انحرافات الغشاء بواسطة المعادلة (5.6.3). انطلاقاً من $n = 2$ (الشكل 5.19a) وحيث ان $\phi = 0$ على الحدود تعطي المعادلة (5.6.5)

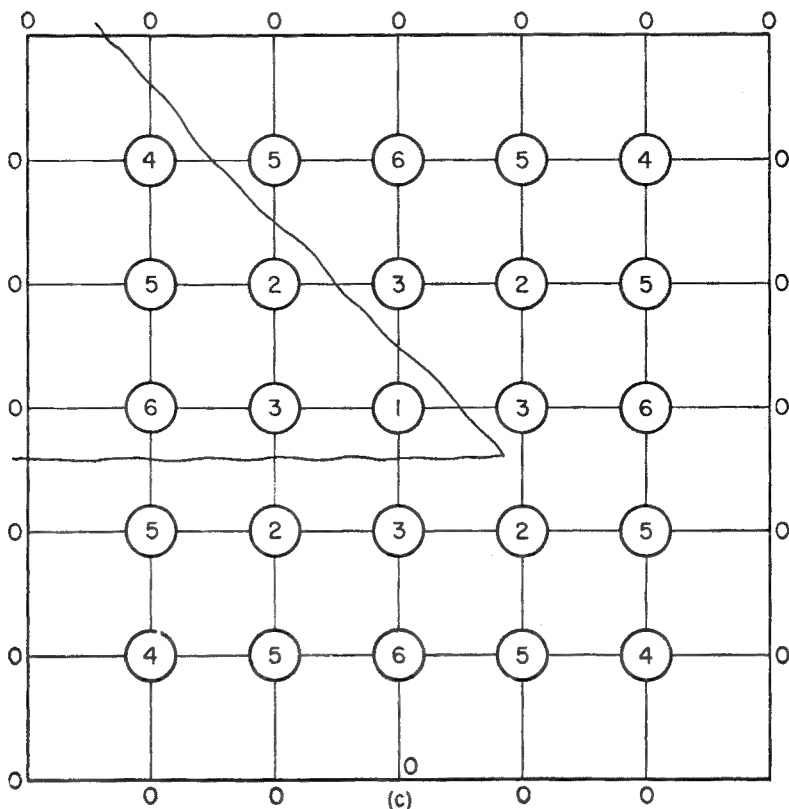
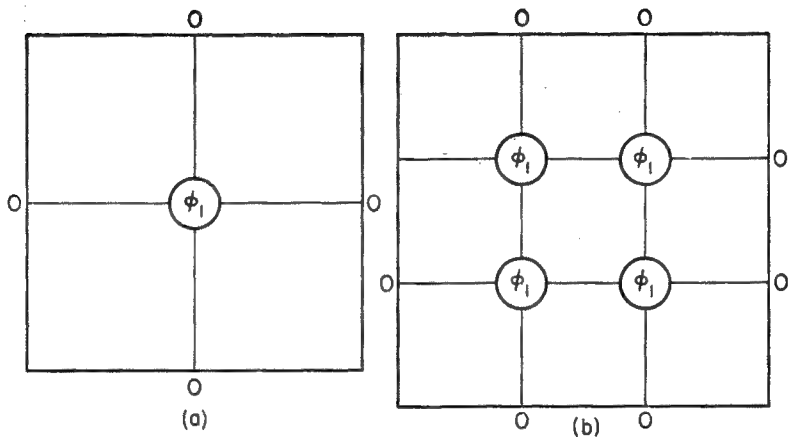
$$0 + 0 + 0 + 0 - 4\phi_1 + \frac{1}{4} = 0$$

او $\phi_1 = 0.0625$ $n = 3$ (الشكل 5.19b) تعطي المعادلة (5.6.5)

$$0 + 0 + \phi_1 + \phi_1 - 4\phi_1 + \frac{1}{9} = 0$$

$$\phi_1 = 0.0556$$

وباستعمال $n = 6$ تعطي المعادلة (5.6.5) التي ضربت جميع حدودها بالمقدار 10^4



شكل (١٩-٥)

لتجنب الكسور العشرية .

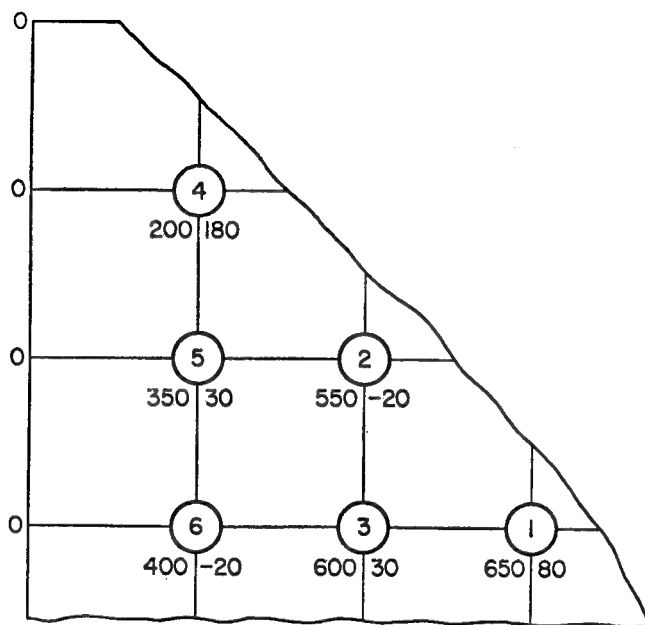
$$\phi_a + \phi_b + \phi_r + \phi_l - 4\phi_i + 278 = 0. \quad (5.6.6)$$

ونتيجة للتناظر ، فان ثمن الغشاء لسته قيم ϕ فقط ينبغي اخذها بنظر الاعتبار كما هو موضح في الشكل 5.19c ونتيجة للتناظر ايضا فان المتغيرات δR في البواقي بسبب تغير $\delta\phi = 1$ في قيمة ϕ لها القيم المبينة في الجدول 5.5

$\delta R_i \backslash \delta\phi_i$	$i = 1$	2	3	4	5	6
$i = 1$	-4	0	+1	0	0	0
2	0	-4	+2	0	+1	0
3	+4	+2	-4	0	0	+1
4	0	0	0	-4	+1	0
5	0	+2	0	+2	-4	+2
6	0	0	+1	0	+1	-4

جدول 5.5

وقد حُسِبَت قيم ϕ الابتدائية بالاستكمال بصرياً من قيم $\phi_1 = 625 \times 10^4$ حيث $n = 2$ ومن $\phi_1 = 556 \times 10^4$ حيث $n = 3$ وتظهر هذه القيم في الشكل 5.20 سوية مع قيم البواقي المناظرة .



شكل (٥-٢٠)

ان جدول الارخاء 5.6 يعطي . اولاً قيم ϕ لرقمين حسبت بالبواقي المدورة rounded-off (يختصر أكبر باقي في كل خطوة بالأرخاء المفرط overrelaxation أساساً) ثم يحسب رقمان آخران بارخاء المتبقيات نتيجة قيم ϕ ذات الرقمين (ومرة أخرى يستعمل أساساً الأرخاء المفرط) .
ونحسب انحرافات الغشاء الفعلية من قيم ϕ في الجدول 5.6 والمعادلة (5.6.3)

	①	②	③	④	⑤	⑥					
65	8	55	-2	60	3	20	18	35	2	40	-2
6	-16	3	4	3	5	5	-2	3	8	2	4
	-4		10	1	14	1	4		-4		-4
	0		-2		-1		0		-2		-1
		0		5				1		0	
71				1	26			2			
		58							42		
			64				38				
710	-2	580	-2	640	8	260	-2	380	18	420	-2
10	38	8	14	10	24	4	14	8	-14	7	14
1.5	-2	2	-18	2	-16	0.5	-2	2	-10	0.5	24
	8	0.5	2		-8		2		-2		-4
	0		8		1		0		3		0
			-2		5			-3		2	
721.5			2		-3	264.5		-1			0
		0		-1.5				-0.5			
				-0.5				0		427.5	
		590.5		0				0.5			
			652.0				390.0				

جدول (5-6)

5.7 اللي المرن

Elastic Torsion

لقد تم في نظرية المرونة البرهنة على أن الاجهاد المماسي tangential stress قضيب موشوري ملوي ثابت المقطع . يؤخذ محوره كأحدائي τ_x . يسكن التعبير عند بدلالة مشتقات دالة أي ψ بالمعادلات .

انظر مثلاً (تيموشكو وج. ن. كودير) نظرية المرونة . شركة مكروهيل . نيويورك 1951 الصفحة 258 ومايلها .

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.7.1)$$

وتمثل τ_{xz}, τ_{yz} هنا مركبات τ_z في اتجاه y, x على التوالي G معامل القص . θ زاوية البرم لكل وحدة طول . إذا الدالة ψ تحقق بمعادلة بواسان .

$$\nabla^2 \psi + 2 = 0 \quad (5.7.2)$$

والشروط الحدودية

$$\psi = 0 \quad (5.7.3)$$

إذا كان مقطع القضيب صلباً

ويعبر عن عزم اللي M_t torque الذي يسبب الاجهادين في المعادلة (5.7.1) بدلالة ψ بالمعادلة التالية :

$$M_t = 2G\theta \iint \psi \, dx \, dy, \quad (5.7.4)$$

حيث التكامل الثاني يمتد ليشمل على مقطع القضيب .

نود تعيين الاجهاد الاقصى . عددياً . في قضيب موشوري مربع المقطع اضلاعه L موازية لاحداثي y, x عندما يعمل على القضيب بعزم لي M_t ينتج اجهاداً ضمن حدود المرونة (elastic limit) للحصول على حل عددي بصيغة لا بعدية . خذ الاصل عند احد زوايا المقطع ودع في المعادلتين (5.7.2) , (5.7.3)

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{1}{L^2} \psi(x, y); \quad (5.7.5)$$

$$\xi = \frac{x}{L}; \quad \eta = \frac{y}{L}$$

حيث نحصل بهذه الطريقة على مسألة ϕ الحدودية .

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + 2 = 0; \quad (5.7.6)$$

$$\phi(0, \eta) = \phi(1, \eta) = \phi(\xi, 0) = \phi(\xi, 1) = 0.$$

ان مقارنة المعادلة (5.7.6) بالمعادلة (5.6.4) تبرز على ان دالة الي اللابعدى ϕ في هذا البند توفي بنفس مسألة القيم الحدودية كذلك للانحراف اللابعدى ϕ لعشاء في البند (5.6) . وباستثناء العامل 2 في المعادلة . وحيث ان المعادلتين التفاضليتين (5.6.4)

و (5.7.6) هما خطيتان . يكون كلهما متناسبا طرديا مع الثابت ، ولذلك فان قيم دالة اللي اللابعدى ϕ في المعادلة (5.7.6) هي ضعف قيم انحراف الغشاء ϕ في الجدول (5.6) وبعبارة اخرى فان انحراف الغشاء هو نظير *analogue* لدالة اللي .

يبين الجدول 5.7 قيم دالة اللي اللابعدى ϕ ، المأخوذة من حل مسألة الغشاء في الجدول 5.6 وباستعمال $n = 6$

Point	1	2	3
$10^4 \cdot \phi$	1443	1181	1304
Point	4	5	6
$10^4 \cdot \phi$	529	780	855

جدول (٧-٥)

وتأخذ الاجهادات [المعادلة (5.7.1)] وعزم اللي [المعادلة (5.7.4)] عند التعبير عنها بدلالة ϕ [المعادلة (5.7.5)] الشكل التالي

$$\tau_{zz} = G\theta L \frac{\partial \phi}{\partial \eta}; \quad \tau_{yz} = -G\theta L \frac{\partial \phi}{\partial \xi}; \quad (5.7.7)$$

$$M_t = 2G\theta L^4 \int \int \phi \, d\xi \, d\eta \equiv 2G\theta L^4 V, \quad (5.7.8)$$

وتظهران مركبتى الاجهاد تتناسبان طردياً مع انحراف الغشاء ϕ في اتجاهي y, x وان عزم اللي يتناسب طردياً مع الحجم V تحت الغشاء ϕ .

وبصورة خاصة . تقع النهاية العظمى للاجهاد في نقطة الوسط A من ضلع المقطع (شكل 5.17)

$$|\tau_{\max}| = G\theta L \left| \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_A. \quad (5.7.9)$$

ويمكن الحصول على قيمة النهاية العظمى للانحدار $\partial \phi / \partial \xi$ عند A بمفكوك الفروق الامامية للمشتق الاول من المعادلة (2.5.4). باستعمال فروق قيم ϕ في الجدول 5.7، $h = \frac{1}{6}$ ويبين الجدول

n	ϕ	$\Delta\phi$	$\Delta^2\phi$	$\Delta^3\phi$	$\Delta^4\phi$	$\Delta^5\phi$	$\Delta^6\phi$
0	0	855	-406	96	-64	0	0
1	855	449	-310	+32	-64	0	
2	1304	+139	-278	-32	-64		
3	1443	-139	-310	-96			
4	1304	-449	-406				
5	855	-855					
6	0						

جدول (٨-٥)

5.8 فروق ϕ الامامية المتوالية على طول المحور الوسطي للمقطع . وبواسطة هذا الجدول تعطي المعادلة (2.5.4)

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_A = \frac{1}{\xi} [855 - \frac{1}{2}(-406) + \frac{1}{3}(96) - \frac{1}{4}(-64)] = 6636.$$

ولذلك بالمعادلة (5.7.9) مع تذكر العامل 10^4 المستعمل في الجدول 5.7.

وتختلف القيمة أعلاه بمقدار 1.7 بالمائة عن القيمة $0.675G\theta L$ التي حصل عليها «تيموشنكو» باستعمال مفكوك متسلسلة أسية ϕ power series *.

ويقتني عزم اللي M_t المناظر بتقييم التكامل المزدوج في المعادلة (5.7.8) باستعمال قانون سمبسون الثلاثي . باستعمال المؤثر B_4 من الشكل 5.7 مرة واحدة عند 1 . أربع مرات عند . وأربع مرات عند 4 (الشكل 5.19c) . باستعمال مؤثر الشكل 5.8 .

$$\begin{aligned} \iint \phi d\xi d\eta &= \frac{1}{9 \cdot 36} \{4 \cdot 1181 + 4 \cdot 4 \cdot 1304 + 16 \cdot 1443 \\ &+ 4[0 + 0 + 0 + 1181 + 4(0 + 0 + 780 + 780) + 16 \cdot 529] \\ &+ 4[0 + 0 + 1181 + 1181 + 4(0 + 780 + 780 + 1304) + 16 \cdot 855]\} \\ &= 685.8. \end{aligned}$$

ولذلك

$$M_t = 2 \cdot 685.8 \cdot 10^{-4} G\theta L^4 = 0.1372 G\theta L^4. \quad (a)$$

وهذه القيمة اصغر بمقدار 2.42 بالمائة من تلك التي اقتناها « تيموشنكو » من متسلسلة رأسية .

5.8 حل مسألة في اللي اللدن بالارخاء

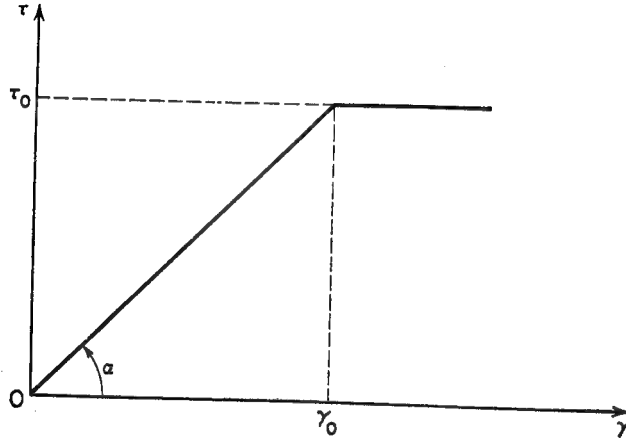
Solution of a Problem in Plastic Torsion by Relaxation

ان حل مسألة اللي عددياً لاجهادات اكبر من حد المرونة ، أي ضمن مدى اللدونة يقتنى بسهولة بواسطة تناظر الغشاء (membrane analogy) في القسم السابق . ولهذا الغرض . يلاحظ أن حل مسألة اللي المرن بالفروق المحدودة والأرخاء هونظيرلاستبدال الغشاء المتصل continuous بشبكة مرنة . ثم تحمل الشبكة عند العقد (nodes) التي تقابل الأرتكاز . وتحتوي معادلة البواقي المناظرة للمعادلة (5.7.6)

$$R_i = (\phi_a + \phi_b + \phi_r + \phi_l - 4\phi_i) + \frac{z}{n^2} \quad (5.8.1)$$

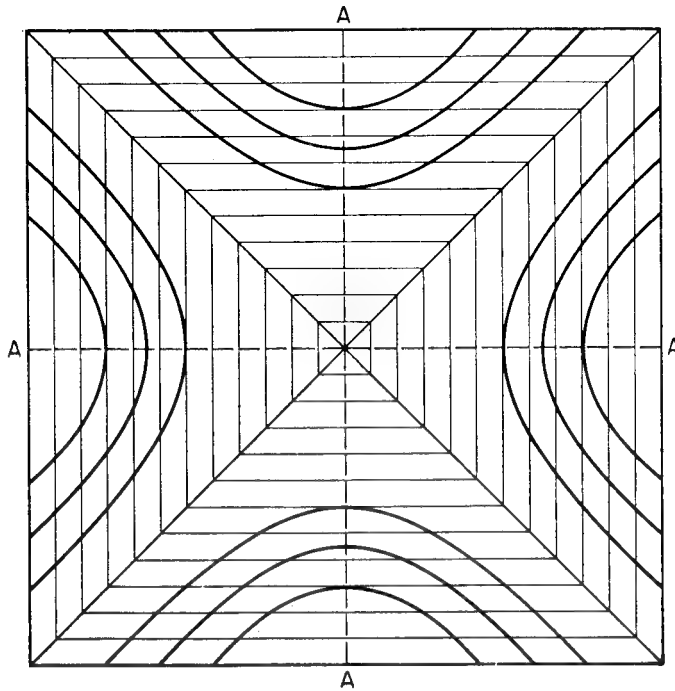
على حد داخل قوسين يتناسب طردياً مع محصلة الشد في الأسلاك الأربعة الملتقية عند العقدة i كما تحتوي على الحد $-\frac{2}{n^2}$ والمتناسب طردياً مع الحمل المسط . ولذا فإن الفضلة تمثل القوة غير المتوازنة (unbalanced) عند العقدة i . والتي يجب أن تتلاشى لغرض الإتزان equilibrium

لنفرض أن مادة القضيب الملولي تنصرف بمرونة حتى القيمة τ_0 من أجهاد القص (shear stress) τ ثم بلدونة فيما بعد ذلك . أن أي زيادة في الاستطالة (strain) γ فيما وراء المرن الأقصى γ_0 . أي زيادة البرم θ عن حد البرم θ_0 . لن تزيد الأجهاد القصي عن τ_0 (الشكل 5.21) .



شكل (٥-٢١) مادة مرنة - لدنة

فإذا أطلق M_0 على قيمة عزم اللي الذي يسبب أجهداً τ_0 في نقاط الوسط A من الحافة (الشكل 5.22) حيث الأجهد أقصاه . فان زيادة عزم اللي عن M_0 تسبب اختراق الأجهد اللدن τ_0 للمقطع . بحيث يكون الأجهد في بعض المناطق اللدنة حول النقاط مساوياً τ_0 في كل مكان . من السهل تصور هذه المناطق بالاستعانة بتناظر الغشاء . حينما يزداد عزم اللي M فان نظير M . أي حجم الغشاء V . يزداد أيضاً بسبب ازدياد الضغط p فينتفخ الغشاء ويزداد انحداره . تصوراً زجاجياً ذو انحدار ثابت m . ينظر الأجهد الأقصى τ_0 موضوعاً فوق الغشاء . بينما يفتح الغشاء . سيمس السقف . ابتداء من النقاط A ويزداد الضغط p . ينسب التماس بين الغشاء والسقف على مناطق « لدنة » أوسع فأوسع كما هو مبين في الشكل 5.22 وفي النهاية . عندما يكون كامل المقطع في المدى اللدن . يتماس الغشاء مع السقف في كل مكان ويكون له شكل هرم ..



المناطق اللدنة في اللي شكل (٥-٢٢)

من الواضح الآن . أنه بينما يكون الحمل الخارجي p في المناطق المرنة موازياً بالشد S في الغشاء . فإن أية قوة غير موازنة في المناطق اللدنة توازن تلقائياً برد فعل السقف . ان ملاحظة « ساوثويل » (Southwell) هذه تعطي طريقة بسيطة لحل مسألة اللي المرن - اللدن .

دعنا نفترض أن الانحرافات اللابعدية ϕ للغشاء كما حسب الجدول (5.7) تناظر قيم θ_0 للبرم . وأنه لهذا السبب . يكون « انحدار » السطح ϕ عند A مناظراً للاجهاد اللدن τ_0 ويتقرب الانحدارات بالفروق الأولى . يجب أن يؤخذ الثابت للسقف اللدن مساوياً للقيمة 855 التي هي ارتفاع الغشاء عند نقطة الارتكاز. مقسماً على $h = \frac{1}{8}$ (الشكل 5.19c) . وعندئذ يكون ارتفاع نقاط السقف مساوياً 855 للنقاط 4, 5, 6, ومساوياً 855 = 2 1710 للنقاط 2, 3, ومساوياً 855 = 3 2565 للنقطة (الشكل 5.23) .

	855	855	855	855	855
4	855				
	855	2	1710	1710	855
5					
	855	3	1710	1	2565
6					
	855	1710	1710	1710	855
	855	855	855	855	855

ارتفاعات السطح اللدنة شكل (٢٣-٥)

من ناحية اخرى . حيث ان τ تناسب طرديا مع θ بالمعادلة (5.7.9) ان وصل
البرم قيمة ما . ولتكن $1.5\theta_0$. وكانت المادة لا تزال تنصرف بمرونة . فان ارتفاعات
الغشاء ستكون مرة ونصف بقدر الارتفاعات المحسوبة في الجدول 5.7 وتكون لها القيم
المعطاة في الشكل 5.24 . وحيشا تكون الابعاد الصادية في الشكل 5.24 اكبر من
مقابلها في الشكل 5.23 . فان السقف سيمنع ازاحة displacement
الغشاء . ولذا يتوجب خفض الغشاء الى مستوى السقف عند النقاط 2, 3, 5, 6 بواسطة
الازاحات السالبة في الجدول 5.9 . وتقيم البواقي الناتجة عن هذه الازاحات بواسطة
المعادلة (5.8.1) وتظهر في الجدول 5.10 تذكر ان البواقي تمثل قوى غير موازنة
وملاحظة ان البواقي الموجبة قوى غير موازنة اتجاهاها الى اعلى يعادلها السقف . لذلك فان
البواقي الموجبة تهمل ويتم ارخاء البواقي السالبة فقط في كل خطوة . وقد انجر الارحاء في

	794	1170	1282	1170	794
4					
	1170	1771	1956	1771	1170
5	2				
	1282	1956	2164	1956	1282
6	3	1			
	1170	1771	1956	1771	1170
	794	1170	1282	1170	794

شكل 5.24.

Table 5.9

Point	2	3	5	6
Displacement	1710 - 1771 = -61	1710 - 1956 = -246	855 - 1170 = -315	855 - 1282 = -427

الجدول 5.11 الذي يبين الارتفاعات الجديدة للعشاء الى ثلاثة ارقام . ان الارتفاع عند النقطة 6

Table 5.10
Lowering of Membrane to Roof

4				
794				
0	-630			
5		2		
1170		1771		
-315	772	-61	-878	
855		1710		
6		3		1
1282		1956		2164
-427	832	-246	435	0
855		1710		2164
				-984

جدول

المنظر للاجهاد اللدن هو 855 كما ان المنطقة اللدنة تمتد الى نقاط بين 3 , 6 وبين 4 , 5

4				
794	-630			
-157.5				
636.5	0			
5		2		
855	+772	1710	-878	
0		-282		
855	+332.5	1428	0	
6		3		1
855	+832	1710	+435	2164
0		-125		-371
855	707	1585	0	1793
				-984
				0

جدول (٥-١١)

وبين الجدول 5.12 نفس الحسابات لبرم $\theta = 1.75\theta_0$ هنا تمتد المنطقة
اللدنة ثانية بين النقاط 3,6 وبين 5,4 غير ان حدودها اقرب الى النقاط 4,6 من الحالة
 $1.5\theta_0 = \theta$ ويعطي الشكل 5.25 المناطق اللدنة المقابلة الى $\theta = 1.5\theta_0$ وإلى $\theta = 1.75\theta_0$

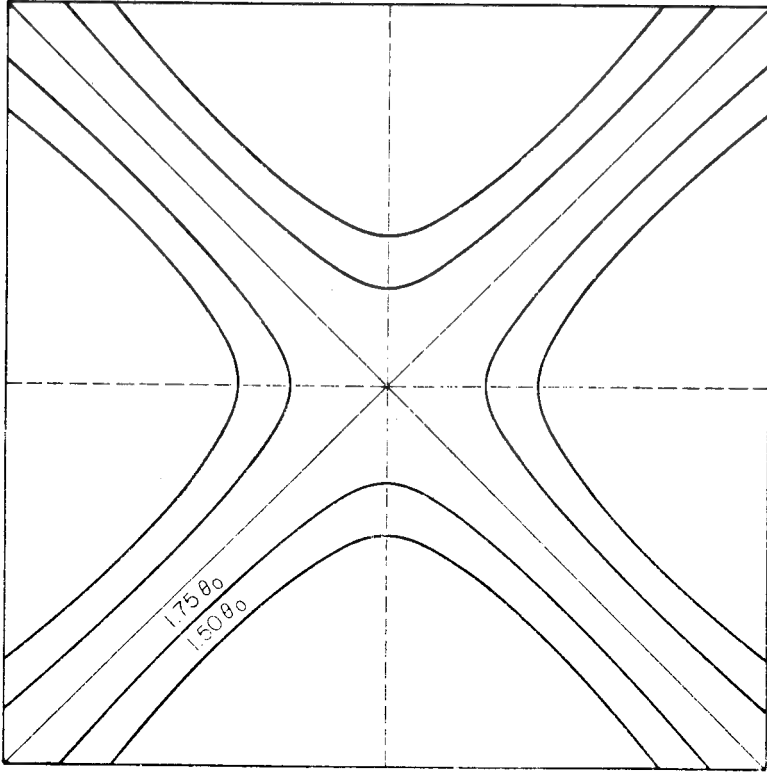
Table 5.12
Relaxation of Negative Residuals ($\theta_2 = 1.75\theta_0$)

4	
855	-736.8
-184.2	
670.8	0

5		2	
855	+971	1710	-736
0		-186	
855	600.8	1524	0

6		3		1	
855	+972	1710	+933	2525	-2288
0		-4		-576	
855	968	1706	1	1949	0

جدول (١٢-٥)



شكل (٢٥-٥)

اصبح ممكنا الآن حساب تكامل I^* للدالة المرونة - اللدنة ϕ باستعمال قانون سيمبسون
 الثلاثي (البند 5.3b) عند $1.5\theta_0 = \theta_1$ نحصل على $779.1 = I_1$
 وعند $1.75\theta_0 = \theta_2$ نحصل على حجم $810.3 = I_2$

ولغرض الحصول على عزومي الي المقابلين M_2, M_1 نعوض في المعادلة (5.7.8)
 قيمة $G\theta L$ المعطاة بالمعادلة (5.7.9)

$$M_i = 2G\theta L^3 V = \frac{2\tau_{\max}}{\frac{\partial \phi}{\partial \xi}} L^3 V, \quad (5.8.2)$$

وحيث أن

$$\tau_{\max} = \tau_0 \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{\max} = m$$

للحالتين المرنة واللدنة . تكون النسبة

$$\tau_{\max} / \left| \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{\max} = \tau_0 / m = \text{const.} \quad \text{ثابت}$$

وهكذا فإن عزوم اللي المرنة واللدن تناسب طرديا مع V

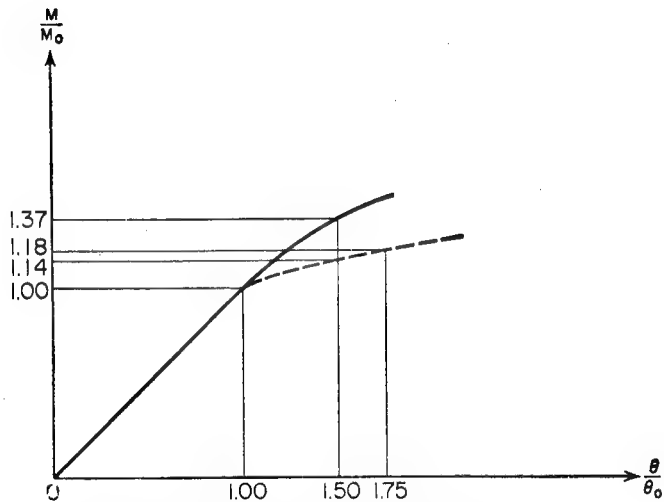
$$\frac{M_1}{M_0} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{779.1}{685.8} = 1.136 \quad \text{for } \frac{\theta_1}{\theta_0} = 1.5$$

$$\frac{M_2}{M_0} = \frac{V_2}{V_0} = \frac{810.3}{685.8} = 1.182 \quad \text{for } \frac{\theta_2}{\theta_0} = 1.75$$

ويعطي الشكل 5.26 خطا بيانيا لتغير M/M_0 مع θ/θ_0 كحالتين

$$\text{الخط المتقطع} \quad \left| \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{\max} = \frac{85.5}{1/6} = 5130 \quad (\text{broken line})$$

$$\text{الخط المتواصل} \quad \left| \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{\max} = \frac{1106}{1/6} = 6636 \quad (\text{continuous line}),$$



العزم وعبرم في اللي اللدن لمقطع مربع شكل (٢٦-٥)

وتمثل الحالة الثانية قيمة اذق للانحدار عند 4. اخذت من الجدول 5.8 وهو مبين في الشكل . ان العلاقة بين عزم اللي وبين البرم هي غير خطية في المدى اللدن كما ان التقريب العددي للانحدار عند الحدود يؤثر كثيراً على النتائج .

5.9 اهتزاز الأغشية Membrane Vibrations

ان الاسلوب المستعمل في القسم السابق لحل مسألة اللي قد يستعمل لحل مسائل الاهتزاز الثنائية البعد

تقتني المعادلة التفاضلية للاهتزاز الحر لغشاء باضافة قوى الاستمرارية $-m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ الى معادلة التوازن (5.6.1) حيث تمثل m كتلة الغشاء لكل وحدة مساحة . ويجعل الضغط الخارجي p مساوياً للصفر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{m}{S} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \quad (5.9.1)$$

ولايجاد الترددات الطبيعية natural frequencies ω للغشاء . يفترض ان الدالة (x, y, t) تمثل اهتزازاً توافقياً harmonic vibration

$$z(x, y, t) = Z(x, y) \sin \omega t \quad (a)$$

وتعوض في المعادلة (5.9.1) حيث تصبح بعد القسمة على $\sin \omega t$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{m\omega^2}{S} Z = 0. \quad (5.9.2)$$

ولحل المسألة بصيغة لابعدية ولغشاء مربع ضلعه ما مسند على حدود مسطحة . تدخل التحويلات المؤلفة

$$x = \xi L; \quad y = \eta L. \quad (b)$$

على المعادلة (5.9.2) حيث تصبح

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} + KZ = 0, \quad (5.9.3)$$

حيث

$$K = \frac{mL^2}{S} \omega^2. \quad (5.9.4)$$

ومن ثم تحول المعادلة (5.9.3) الى معادلة فروقية بمؤثر الشكل 5.3b وباستعمال

$$h^2 = 1/n^2:$$

$$Z_a + Z_b + Z_r + Z_i + \left(\frac{K_n}{n^2} - 4 \right) Z_i = 0. \quad (5.9.5)$$

وتتطلب الشروط على الحدود كون

$$Z = 0 \text{ على الحدود} \quad (5.9.6)$$

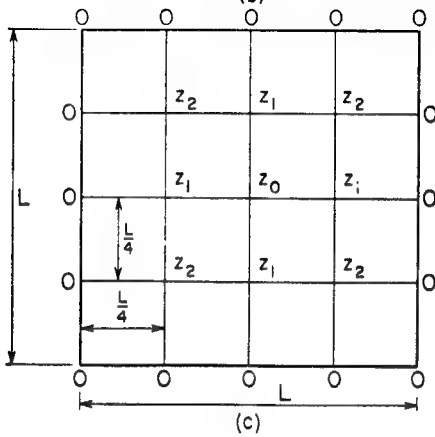
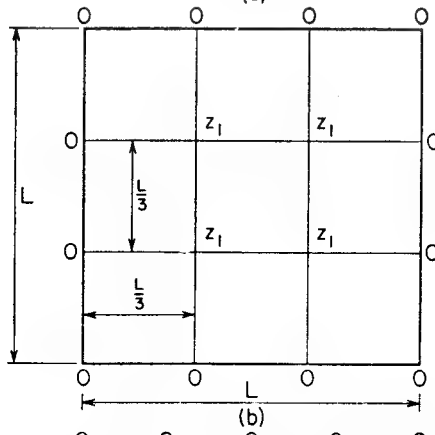
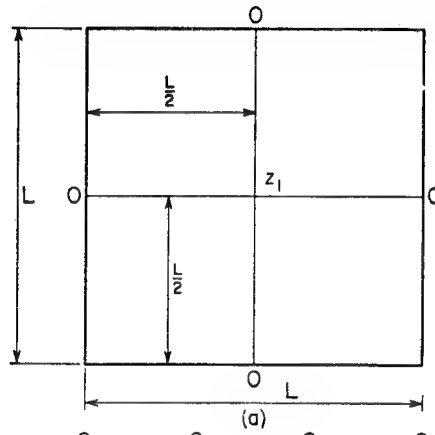
نقيم $n = 2, 3$ (للشكل 5.27a , 5.27 b) تعطي المعادلة (5.9.5)

$$n = 2; \quad \left(\frac{K_2}{4} - 4 \right) Z_1 = 0; \quad K_2 = 16 \quad (e = +19\%)$$

$$n = 3; \quad Z_1 + 0 + Z_1 + 0 + \left(\frac{K_3}{9} - 4 \right) Z_1 = 0; \quad K_3 = 18 \\ (e = +9\%)$$

وتكون المعادلة المحددة determinantal equation لقيمة $n = 4$ (شكل 5.27c)

$$\begin{vmatrix} \frac{K_4}{16} - 4 & 2 & 0 \\ 2 & \frac{K_4}{16} - 4 & 1 \\ 0 & 4 & \frac{K_4}{16} - 4 \end{vmatrix} = 0$$



شکل ۲۷-۵

وجذرهما الاصغر هو :

$$K_4 = 18.75 \quad (e = +5\%).$$

وتكون قيم K المستوفاة

$$K_{2,3} = 19.60 \quad (+0.7\%); \quad K_{3,4} = 19.71 \quad (+0.15\%); \quad \text{extrapolated} \\ K_{2,3,4} = 19.75 \quad (-0.051\%).$$

حيث ان قيمة K الصحيحة هي 19.739.

5.10 نقاط الارتكاز قرب الحدود المنحنية

Pivotal Points Near Curved Boundaries

في كافة المسائل في البنود السابقة كانت نقاط الارتكاز داخل مجالات مستطيلة الشكل وعلى حدودها تقع على اركان corners شبك مستطيل كما انها كانت بالنسبة للمحورين الاحداثيين x, y زوجية الفواصل evenly spaced وعندما يتحدد مجال ذو بعدين مغطى بشبكة مستطيلة بمنحنيات بدلا من خطوط مستقيمة ، قد لا يقع بعض او جميع نقاطها الارتكازية الحدية على اركان الشبكة المستطيلة ولذلك فان قوانين خاصة يجب استعمالها عند نقاط الارتكاز المجاورة للحدود .

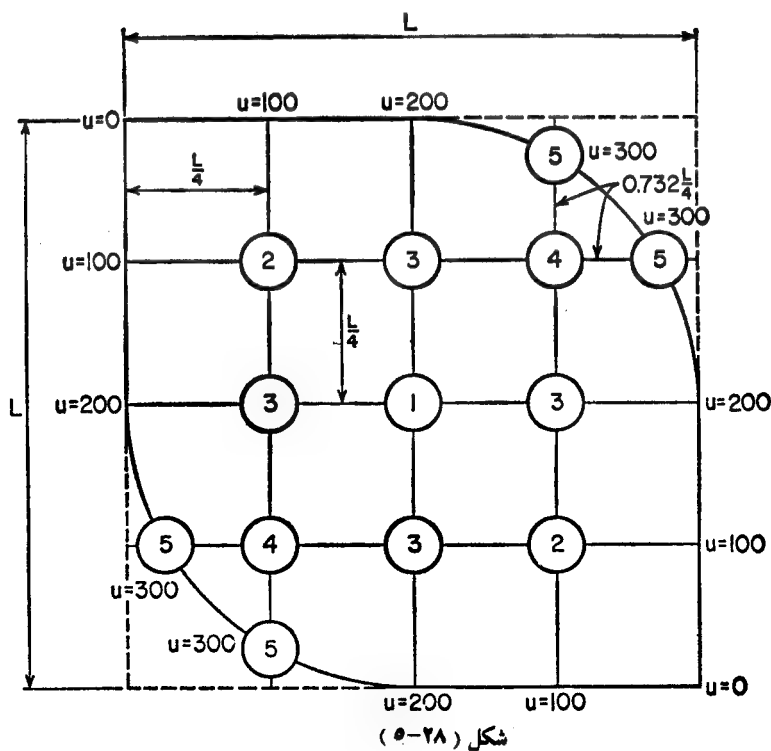
لنتخذ المثال الخاص بمسألة درجة الحرارة المطردة steady-state لصفحة معدنية والواردة في الشكل 5.28 ، حيث نجد ان الصفحة مربعة الشكل طول ضلعها L وان كل من اركانها محاطة باقواس دائرية نصف قطرها $\frac{1}{2} L$

ان درجة الحرارة u في الصفحة تحقق معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$ (البند 5.4) وهذه المعادلة يمكن تحويلها الى معادلة الفروق بموجب مؤثر الشكل 5.3b في النقاط (1)، (2)، (3)، لكن النقطة (4) ليست منتظمة الفواصل بالنسبة لنقاط الارتكاز المجاورة حيث يجب ان تعامل بواسطة معادلة خاصة .

ان معادلة الفروق $\nabla^2 u = 0$ في النقطة العليا (4) مثلا يمكن الحصول عليها بموجب المعادلة (2.2.3) التي تصبح في الحالة التي نحن بصدددها على الصورة التالية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \frac{2}{\alpha(\alpha+1)} [\alpha u_l - (1+\alpha)u_i + u_r] + O(h); \quad (a)$$

$$\alpha = \frac{x_r - x_i}{h} = \frac{x_5 - x_4}{L/4} \quad (b)$$



و بموجب المعادلة المناظرة لاتجاه y تصبح

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \frac{2}{\beta(\beta+1)} [\beta u_b - (1+\beta)u_i + u_a] + O(h); \quad (c)$$

$$\beta = \frac{y_a - y_i}{h} = \frac{y_5 - y_4}{L/4} \quad (d)$$

وبإضافة المعادلة (a) الى (c) فإن المؤثر $\nabla^2 u$ يحصل بالصيغة :

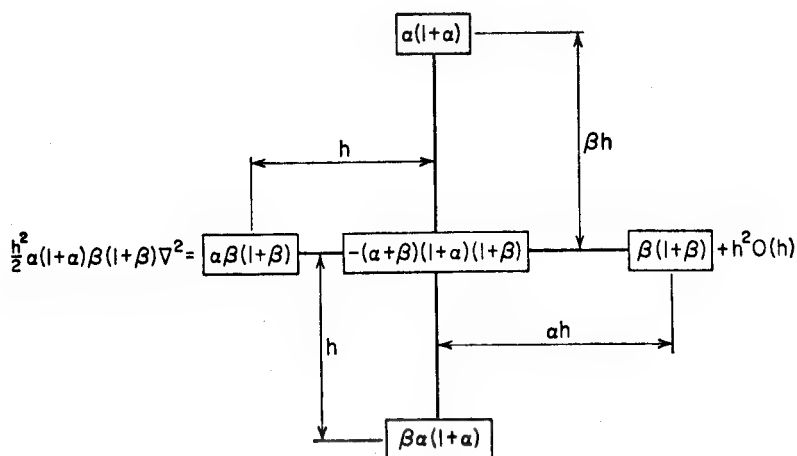
$$\frac{\hbar^2}{2} \alpha(1+\alpha)\beta(1+\beta)\nabla^2 u = \beta(1+\beta)[\alpha u_i - (1+\alpha)u_i + u_r] + \alpha(1+\alpha)[\beta u_b - (1+\beta)u_i + u_a], \quad (5.10.1)$$

والتي وردت ايضا في جزئ شكل 5.29

وفي مسألة شكل 5.28 فان $\beta = \alpha$ ومؤثر شكل 5.29 يصبح بعد القسمة على $(1 + \alpha)$ مؤثر شكل 5.30

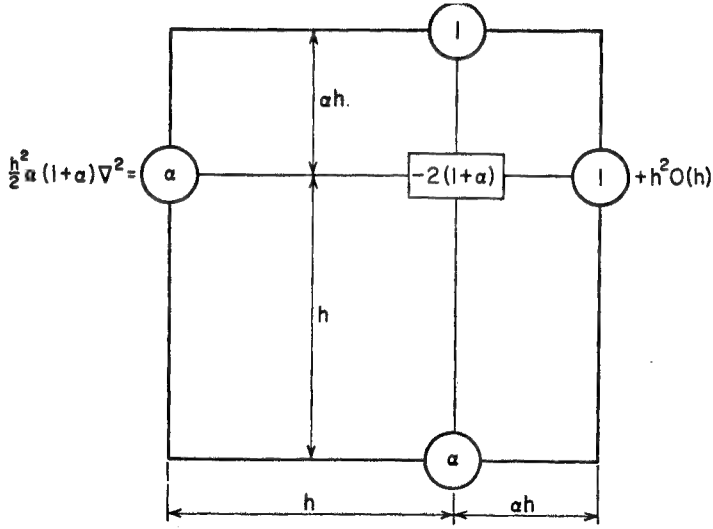
وإذا استعملنا مؤثر شكل $\nabla^2 u$ في النقاط (1), (2), (3) فإننا نحصل على منظومة (مجموعة) من المعادلات الخطية الى u المعطاة في الجدول 5.13 والتي جذورها هي :

$$u_1 = 203.7; \quad u_2 = 151.9; \quad u_3 = 203.7; \quad u_4 = 259.3.$$



شکل (۲۹-۵)

المؤثر ∇^2 للنقاط الزوجية الفواصل



شكل (٥-٣٠)

للمؤثر الشكل 5.30 خطأ رتبته h بينما مرتبة الشكل 5.3b هي h^2 ولكي نحصل على اخطاء متوائمة consistent errors خلال المجال فانه يمكن التعبير عن $\nabla^2 u$ بواسطة مؤثر المعادلة (2.3.6)، غير ان هذا لا يغير الارقام الاربع الاولى في u_i في هذا المثال (انظر المسألة 5.32)

شكل (٥-٣١)

Point	u_1	u_2	u_3	u_4	c
1	-4	0	4	0	0
2	0	-4	2	0	-200
3	1	1	-4	1	-200
4	0	0	1.464	-3.464	-600

ان نمط صيغ الفروق المستعملة في هذا البند تستعمل ايضاً في المسائل المشتملة على ما يسمى بالشبكات المدرجة *graded nets* (انظر البند 5.5) هذه الشبكات التي تختلف احجام عيونها في المناطق المختلفة من المجال . تستعمل عندما تكون الدالة المراد تعيينها تتغير بسرعة كبيرة في منطقة ما . حيث ان عين شبكة اصغر يعطي دقة اكبر عند النقاط التي

تحتاج إليها . حيث ان الاسلوب المفصل والخاص بالشبكات المدرجة هو خارج نطاق هذا الكتاب فان في وسع القاريء الرجوع الى كتب Southwell والى الابحاث التي تخص هذا الموضوع

5.11 مؤثر بواسان المحسن في المحاور الاحداثية المتعامدة

An Improved Poissonian Operator in Cartesian Coordinates

ان مؤثر الفرق اللابلاسي difference Laplacian operator للشكل 5.3b يتأثر بخطأ من المرتبة h^2 . وهو (أي مؤثر الفرق) :

$$Hz_i \equiv z_a + z_b + z_r + z_l - 4z_i \doteq h^2 \nabla^2 z_i \quad (5.11.1)$$

يؤثر الخطأ من المرتبة نفسها على مؤثر لابلاس القطري *diagonal Laplacian operator* في المحاور الاحداثية : ξ, η

$$Xz_i \equiv z_{ar} + z_{bl} + z_{al} + z_{br} - 4z_i \doteq (\sqrt{2} h)^2 \nabla^2 z_i \quad (5.11.2)$$

للكل 5.31 سوف يتبين الآن بان المتوافق الخطية الى Hx_i والى Xz_i يمكن ان تصاغ بحيث يكون الخطأ فيها من المرتبة h^4 .

ولهذه الغاية لناخذ معادلة بواسان Poissonian equation

$$\nabla^2 z = f(x, y), \quad (5.11.3)$$

ثم نعوض عن $h^2 \nabla^2 z$ المؤثر Hx مع الحد الاول من مفكوك الخطأ ينتج :

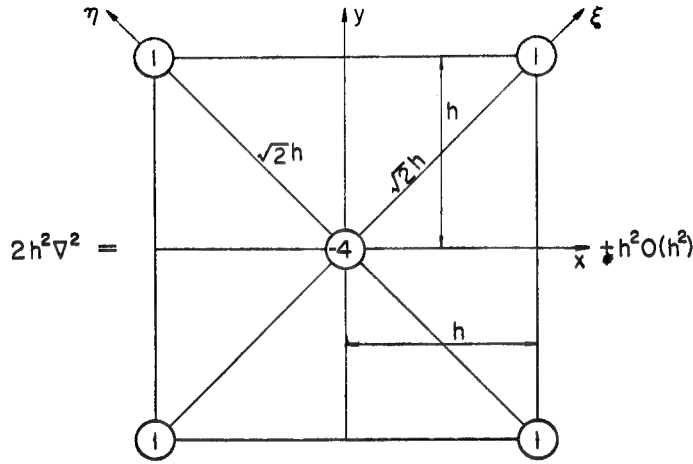
$$h^2 \nabla^2 z \doteq Hx - \frac{h^4}{12} (z_{xxxx} + z_{yyyy}) \doteq h^2 f, \quad (a)$$

حيث الملحقات هنا تدل على المشتقات الجزئية .

وبإضافة وطرح $(2h^4/12)z_{xyxy}$ الى الطرف الثاني من المعادلة (a) على ان نلاحظ في ضوء المعادلة (5.11.3) ان

$$\nabla^4 z = \nabla^2 f, \quad (b)$$

نحصل على



مؤثر X شكل (٥-٣١)

$$h^2 \nabla^2 z \doteq H z - \frac{h^4}{12} \nabla^2 f + \frac{h^4}{6} z_{xxyy} \doteq h^2 f. \quad (c)$$

لنتناول مؤثر لابلاس القطري X_z والحد الاول من مفكوك خطأ

$$\begin{aligned} X z &= 2h^2(z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta}) + \frac{4h^4}{12}(z_{\xi\xi\xi\xi} + z_{\eta\eta\eta\eta}) \\ &= 2h^2(z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta}) + \frac{4h^4}{12}(z_{\xi\xi\xi\xi} + 2z_{\xi\xi\eta\eta} + z_{\eta\eta\eta\eta}) - \frac{8h^4}{12} z_{\xi\xi\eta\eta}. \end{aligned} \quad (d)$$

وبما ان كلا من المؤثرين ∇^4, ∇^2 لا متغير invariant

بالنسبة لتدوير المحاور الاحداثية فانهما متطابقان سواء اخذناهما بالنسبة الى x, y او بالنسبة الى ξ, η ,

وان المعادلة (d) يمكن ان تكتب على الصورة التالية وبموجب المعادلات (5.11.3), (b),

$$2h^2 \nabla^2 z \doteq X z - \frac{h^4}{3} \nabla^2 f + \frac{2}{3} h^4 z_{\xi\xi\eta\eta} \doteq 2h^2 f. \quad (e)$$

وباستعمال التحويل الخطي linear transformation الذي يغير ξ, η الى x, y

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi - \eta); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi + \eta), \quad (f)$$

تصبح مشتقات z بالنسبة الى ξ . η على الصورة التالية :

$$z_{\xi} = z_x x_{\xi} + z_y y_{\xi} = \frac{\sqrt{2}}{2} (z_x + z_y);$$

$$z_{\eta} = z_x x_{\eta} + z_y y_{\eta} = \frac{\sqrt{2}}{2} (z_y - z_x);$$

$$z_{\xi\xi} = \frac{1}{2} (z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy});$$

$$z_{\eta\eta} = \frac{1}{2} (z_{yy} - 2z_{xy} + z_{xx});$$

$$\begin{aligned} z_{\xi\xi\eta\eta} &= \frac{1}{4} [(z_{xxxx} - 2z_{xxxy} + z_{xxyy}) + 2(z_{xxyy} - 2z_{xyyy} + z_{yyyy}) \\ &\quad + (z_{xxyy} - 2z_{xyyy} + z_{yyyy})] = \frac{1}{4} [z_{xxxx} - 2z_{xxyy} + z_{yyyy}] \\ &= \frac{1}{4} \nabla^4 z - z_{xxyy} = \frac{1}{4} \nabla^2 f - z_{xxyy}. \end{aligned} \quad (g)$$

وبتعويض المعادلة (g) في المعادلة (e) ينتج في النهاية

$$2h^2 \nabla^2 z \doteq Xz - \frac{h^4}{6} \nabla^2 f - \frac{4}{6} h^4 z_{xxyy} \doteq 2h^2 f \quad (h)$$

بإضافة المعادلة (c) بعد ضربها في 4 الى المعادلة (h). فان حد الخطأ في h^4 يحدف
ويعبر عن المؤثر $\nabla^2 z$ بدلالة قاعدة النقاط التسعة nine-point formula حيث الخطأ
فيه هو من المرتبة h^4 :

$$6h^2 \nabla^2 z \doteq (4H + X)z \doteq 6h^2 f + \frac{h^4}{2} \nabla^2 f. \quad (5.11.4)$$

ان المؤثر

$$N \equiv 4H + X \quad (5.11.5)$$

قد مثل بالشكل 5.32 حيث كان $\nabla^2 f = 0$ فان المعادلة (5.11.4) تبسط الى

$$h^2 \nabla^2 z \doteq \frac{1}{8} N z_i \doteq h^2 f \quad (\nabla^2 f = 0). \quad (5.11.6)$$

وحيثما كانت $f=0$ فان مؤثر الفرق الابلاسي الذي خطؤه من المرتبة h^4 يصبح :

$$z_i = \frac{1}{8} [4(z_a + z_b + z_r + z_l) + (z_{ar} + z_{br} + z_{al} + z_{bl})]. \quad (5.11.7)$$

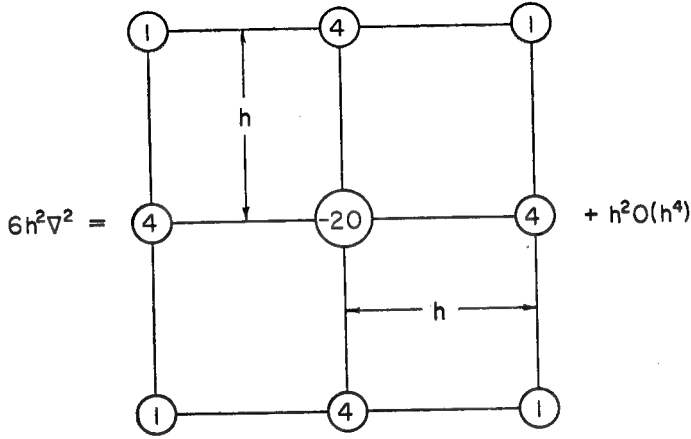


Fig. 5.32. N operator.

شكل 5.32

الجدول 5.14 يعطينا حل مسألة المؤثر N معادلة لابلاس الواردة في البند 5.4 بموجب المعادلة (5.11.7) والتي ينبغي مقارنتها بالجدول 5.3 لادراك الالتمام السريع لمؤثر N والاثـر المسمى بخطأ حجم الشبكة mesh-size lumping error الحاصل في الحلول بموجب المؤثرات المختلفة.

Table 5.14

n	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
0	4375	5312	1875	2500	625	938
1	4312	5412	1805	2486	673	947
2	4318	5405	1813	2495	677	951
3	4318	5408	1817	2498	679	953
4	4320	5409	1818	2500	679	953
5	4320	5410	1818	2500	679	953
6	4320	5410	1818	2500	679	953

جدول 5.14

5.12 المؤثر اللابلاسي في المحاور الأحادية (المائلة)

The Laplacian Operator in Skew Coordinates

مؤثرات الفرق في المحاور الاحداثية الديكارتية قد استخدمت جيدا في المسائل الحاوية على مجالات مستطيلة . وعندما نجعل المجال متوازي اضلاع فانه غالبا ما يكون من الابطـط والأكثر دقة ان نستعمل محاور احداثية فانه في الغالب موازية لأطراف المتوازي الاضلاع . أي المحاور الاحداثية المائلة skew coordinates

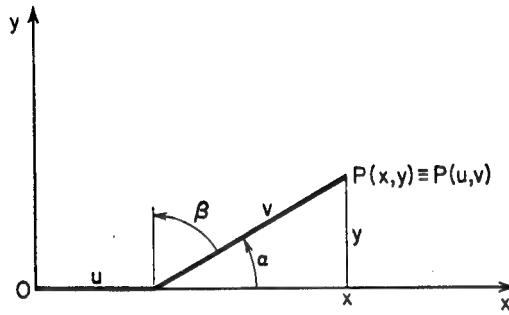


Fig. 5.33.

شكل (٥-٣٣)

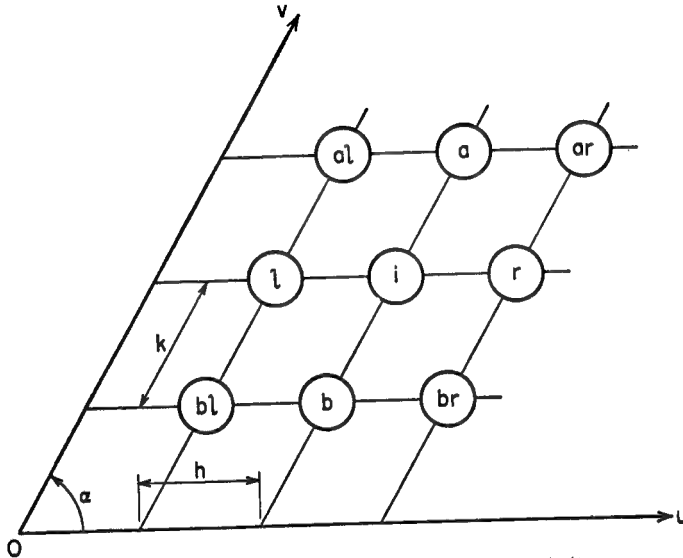
فاذا كانت (x, y) هي النقطة في المحاور الاحداثية الديكارتية وكانت (u, v) هي النقطة في مستوى المحاور الاحداثية المائلة فان العلاقة بين النظامين تكون :

$$x = u + v \cos \alpha; \quad y = v \sin \alpha, \quad (5.12.1)$$

حيث α هي الزاوية المتممة complement الى زاوية الميل β skew angle فاذا رمزنا الى مشتقات x, y بالنسبة الى u, v على التناظر بالرموز السفلية subscript ينتج :

$$x_u = 1; \quad x_v = \cos \alpha; \quad y_u = 0; \quad y_v = \sin \alpha. \quad (a)$$

لنأخذ الدالة $z(u, v)$ حيث u, v ترتبطان مع x, y بالمعادلة (5.12.1) فان المشتقة الأولى الى z بالنسبة الى u, v نحصل عليها بموجب قاعدة تفاضل الدوال المركبة composite وهي :



المشك في المحاور المائلة شكل (٥-٣٤)

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha.$$

المشتقات الثانية تقتني من تربيع المؤثرات z_v, z_u ومن حاصل ضربهما وهي :

$$z_{uu} = z_{xx} \quad (b)$$

$$z_{vv} = z_{xx} \cos^2 \alpha + 2z_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + z_{yy} \sin^2 \alpha \quad (c)$$

$$z_{uv} = z_{xz} \cos \alpha + z_{xy} \sin \alpha. \quad (d)$$

وبتعويز المعادلات (b), (d) في (c)

$$z_{vv} = z_{uu} \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha (z_{uv} - z_{uu} \cos \alpha) + z_{yy} \sin^2 \alpha,$$

حيث تكون z_{vv} بدلالة الحدود z_{uu}, z_{vv}, z_{uv} كما يلي :

$$z_{vv} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (z_{vv} - 2z_{uv} \cos \alpha + z_{uu} \cos^2 \alpha),$$

وبموجب المعادلة (h) يكون المؤثر اللابلاسي في المحاور المائلة :

وتؤول المعادلة (5.12.2) الى

$$(\sin^2 \alpha) \nabla^2 z = z_{uu} - 2z_{uv} \cos \alpha + z_{vv}. \quad (5.12.2)$$

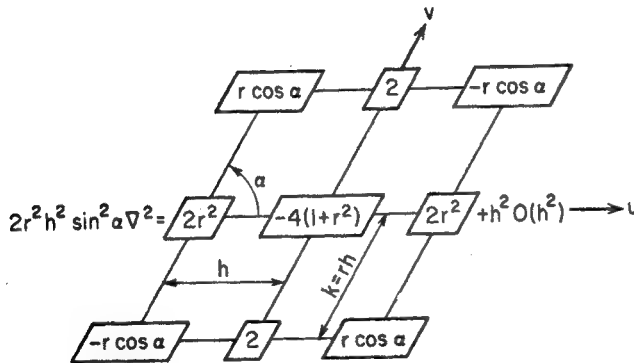
$$\nabla^2 z = z_{uu} + z_{vv}.$$

عندما تكون $\alpha = \pi/2$

ويحول المؤثر ∇^2 في المحاور الاحداثية المائلة الى نظيره مؤثر الفرق وذلك بتعويز المشتقات

z_{uu}, z_{uv}, z_{vv} أي بالتعابير التي تمثلها هذه المشتقات الواردة في شكل 2.8a .

وبموجب رموز الشكل 5.34 ينتج :



∇^2 في المحاور القطبية شكل (5-34)

$$h^2 z_{uu} = z_r - 2z_i + z_t; \quad k^2 z_{vv} = z_a - 2z_i + z_b;$$

$$4hkz_{uv} = z_{ur} - z_{br} - z_{at} + z_{bt},$$

كما ياخذ المؤثر ∇^2 صيغة الجزىء الوارد في الشكل 5.35 حيث $r = k/h$ وقد يستعمل مؤثر الشكل 5.35 مثلاً في تعيين انحراف المركز w لصفحة مائلة اضلاعها $a = b$ وزاوية ميلها $\alpha = 60^\circ$. تستند ببساطة على محيطها ومنتظمة التحميل ان المسألة المتناظرة تؤول الى تكامل المعادلتين

$$\nabla^2 M = -q; \quad \nabla^2 w = -M/D \quad (e) \dots$$

علماً بأن شروطها عند الحدود هي $w = 0$; $M = 0$ وعندما $a = b, r = 1$ باستعمال 5.36 $n = 2, \alpha = 60^\circ$ هو مؤثر الشكل 5.36 نحصل عند مركز الصفيحة من اولى المعادلتين في (e)

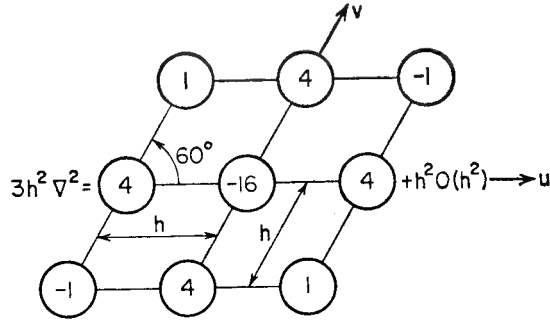


Figure 5.36

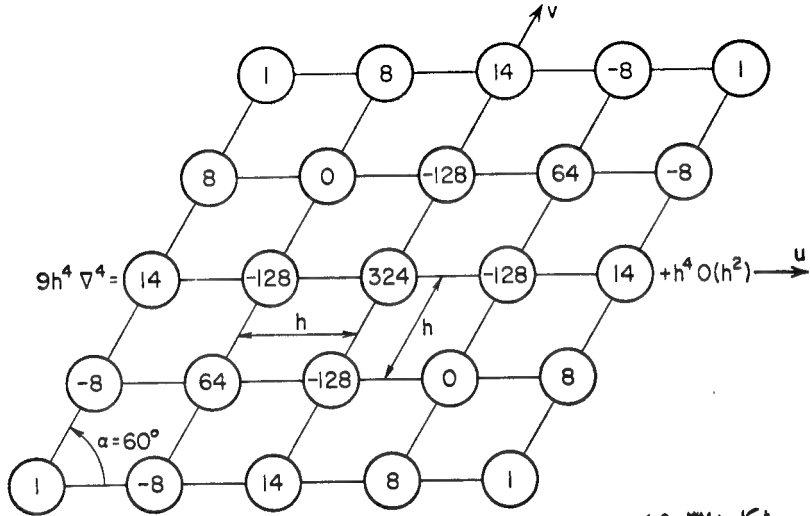


Fig. 5.37. في المحاور المائلة

شكل (٥-٣٧)

$\alpha = 60^\circ$, $h = k$ في المحاور المائلة ∇^4

$$\frac{-16}{3(a/2)^2} M_0 = -q \quad \therefore M_0 = \frac{3}{8} qa^2, \quad \text{(e) في المعادلتين}$$

$$\frac{-16}{3(a/2)^2} w_0 = -\frac{3}{64} \frac{qa^2}{D} \quad \therefore w_0 \Big|_2 = 0.00220 \frac{qa^4}{D}. \quad \text{(e) في الثانية}$$

باستعمال $n = 4$ وحل النظام المناظر المؤلف من اربعة معادلات آنية . نجد بأن

$$w_0 \Big|_4 = 0.00241 qa^4/D$$

كما ان استيفاء h^2 يعطي :

$$w_0 \Big|_{2,4} = 0.00248 \frac{qa^4}{D}$$

ومن السهل ان نحصل على المؤثر ∇^4 في المحاور الاحداثية المائلة في كل دالة عددية حالما يكون ∇^2 معلوما . مثال ذلك باستعمال المؤثر ∇^2 للشكل 5.36 ينتج :

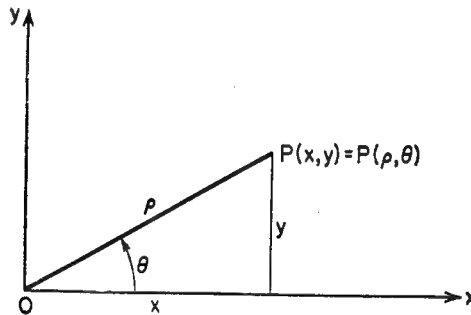
$$9h^4 \nabla^4 z_i = 3h^2 [(\nabla^2 z_{al} - \nabla^2 z_{ar} - \nabla^2 z_{bl} + \nabla^2 z_{br}) + 4(\nabla^2 z_a + \nabla^2 z_b + \nabla^2 z_r + \nabla^2 z_l) - 16\nabla^2 z_i],$$

ويصبح ∇^4 هو مؤثر الشكل 5.37

5.13 مؤثر لابلاس في المحاور القطبية :

The Laplacian Operator in Polar Coordinates

نستعمل المحاور القطبية (شكل 5.38) فيما يخص المجالات الدائرية وتقني من الاحداثيات الديكارتية من خلال التحويلات .



المحاور القطبية شكل (٣٨-٥)

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta; & y &= \rho \sin \theta; \\ \rho &= +(x^2 + y^2)^{1/2}; & \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (5.13.1)$$

ان مشتقات ρ, θ الجزئية بالنسبة الى x, y وبموجب المعادلات (5.13.1) هي كالآتي :

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{x}{\rho} = \cos \theta; & \rho_y &= \frac{1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \sin \theta; \\ \theta_x &= -\frac{y/x^2}{1 + (y/x)^2} = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{\sin \theta}{\rho}; & (a) \\ \theta_y &= \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \theta}{\rho}. \end{aligned}$$

لنأخذ الدالة $z(\rho, \theta)$ حيث فيها كل من ρ, θ دالة الى x, y من خلال المعادلات (5.13.1) . نجد ان مشتقة z الجزئية الاولى بالنسبة الى x, y وبموجب تفاضل الدوال المركبة (a) composite تتحدد كالآتي :

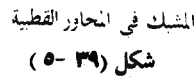
$$\begin{aligned} z_x &= z_\rho \rho_x + z_\theta \theta_x = z_\rho \cos \theta - z_\theta \frac{\sin \theta}{\rho}; \\ z_y &= z_\rho \rho_y + z_\theta \theta_y = z_\rho \sin \theta + z_\theta \frac{\cos \theta}{\rho}. \end{aligned} \quad (b)$$

وبتربيع اول معادلة في (b) نحصل على :

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \right) \left(z_\rho \cos \theta - z_\theta \frac{\sin \theta}{\rho} \right) \\ &= z_{\rho\rho} \cos^2 \theta + z_\rho \frac{\sin^2 \theta}{\rho} + z_{\theta\theta} \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} - 2z_{\rho\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \\ &\quad + 2z_\theta \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (c)$$

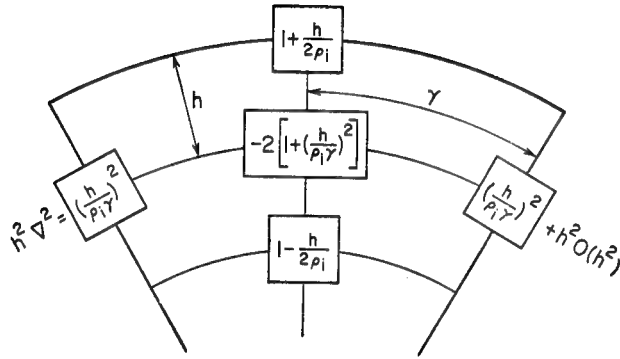
ونقتني z_{yy} اما بان تربيع المعادلة الثانية من (b) او ان تغير θ الى $\theta + \pi/2$ أي يحول $\cos \theta$ الى $\sin \theta$ و $\sin \theta$ الى $-\cos \theta$ في المعادلة (c) وبذلك نحصل على :

$$\begin{aligned} z_{yy} &= z_{\rho\rho} \sin^2 \theta + z_\rho \frac{\cos^2 \theta}{\rho} + z_{\theta\theta} \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} + 2z_{\rho\theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho} \\ &\quad - 2z_\theta \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (d)$$


$$\nabla^2 z = z_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} z_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} z_{\theta\theta}. \quad (5.13.2) \quad \text{جیٹ}$$
$$z_{\rho\rho} = \frac{1}{h^2} (z_a - 2z_i + z_b); \quad z_{\rho} = \frac{1}{2h} (z_a - z_b); \quad z_{\theta\theta} = \frac{1}{\gamma^2} (z_r - 2z_i + z_l),$$

$$h = \Delta\rho; \quad \gamma = \Delta\theta \quad (5.13.3)$$

288



شكل 5.40. ∇^2 in polar coordinates.

$$h^2 \nabla^2 = h^2 \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right] = \left[1 - \frac{h}{2\rho_1} \right] \xrightarrow{h} \left[-2 \right] \xrightarrow{h} \left[1 + \frac{h}{2\rho_1} \right] + h^2 O(h^2) \rightarrow \rho$$

شكل (٥-٤١)

يمكن استعمال مؤثر الشكل 5.41 لتعيين الانحرافات (deflections) (w) عند نقاط ارتكاز الغشاء الخلفي الذي نصف قطره الداخلي a ونصف قطره الخارجي $2a$ الناتجة من الضغط المنتظم p (شكل 5.42) وفي هذه الحالة وبسبب التماثل تؤول المعادلة (5.6.1) التي تحكم انحراف الغشاء الى :

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} + \frac{p}{S} = 0, \quad (e)$$

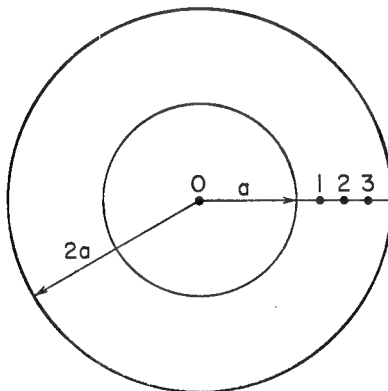
واذا جعلنا :

$$\rho = ax; \quad w = \frac{pa^4}{S} z; \quad h = \frac{1}{n}, \quad (f)$$

فان معادلة الفرق المناظرة تصبح على الصورة التالية :

$$\left(1 - \frac{1}{2nx_i} \right) z_l - 2z_i + \left(1 + \frac{1}{2nx_i} \right) z_r = -\frac{1}{n^2}. \quad (g)$$

وتتقسيم عرض الغشاء الى اربعة اقسام متساوية . عرض القسم الواحد يبلغ $\frac{a}{4}$ فان
المعادلة (g) تعطينا :



شكل (٥-٤٢)

$$\begin{aligned}
 x = \frac{5}{4} \quad 0 - 2z_1 + \left(1 + \frac{1}{8(\frac{5}{4})}\right) z_2 &= -\frac{1}{16}; \\
 x = \frac{3}{2} \quad \left(1 - \frac{1}{8(\frac{3}{2})}\right) z_1 - 2z_2 + \left(1 + \frac{1}{8(\frac{3}{2})}\right) z_3 &= -\frac{1}{16}; \\
 x = \frac{7}{4} \quad \left(1 - \frac{1}{8(\frac{7}{4})}\right) z_2 - 2z_3 + 0 &= -\frac{1}{16}, \\
 -2z_1 + \frac{1}{10}z_2 &= -\frac{1}{16}; \\
 \frac{1}{2}z_1 - 2z_2 + \frac{3}{2}z_3 &= -\frac{1}{16}; \quad \text{أو} \\
 \frac{1}{4}z_2 - 2z_3 &= -\frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

حيث جذور هذا النظام هي :

$$z_1 = 0.100; \quad z_2 = 0.126; \quad z_3 = 0.090,$$

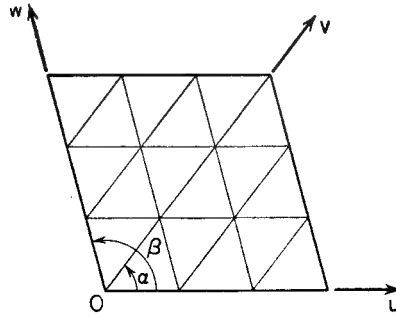
وانحرافات الغشاء المناظرة هي :

$$w_1 = 0.100pa^2/S; \quad w_2 = 0.126pa^2/S; \quad w_3 = 0.090pa^2/S.$$

5.14 المؤثر اللابلاسي في المحاور الأحداثية المثلثية :

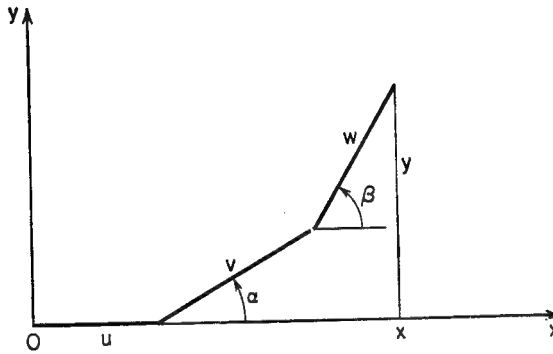
The Laplacian Operator in Triangular Coordinates

ان المشبك اللاديكارتي (non-Cartesian lattices) الاكثر شيوعا لتغطية المجالات ذات الاشكال غير المنتظمة هو المشبك المثلثي (شكل 5.43) ، اذ ان اللابلاسي يمكن التعبير عنه بقيم ارتكاز الشبكة المثلثية باستعمال المحاور الاحداثية المثلثية *triangular coordinates* حيث في هذه المحاور تتعين النقطة :



شكل (٥-٤٣)

في المستوى بموجب ثلاثة احداثيات هي w, v, u (شكل 5.44) وحيث يحتفظ بنسبة ثابتة w/v او $v/u, w/u$ بعين الاحداثيات الثلاثة فان اثنين منها هي اساسية



شكل (٥-٤٤)

افرض ان اتجاه u يتطابق مع المحور x كما انه افرض ان β, α هما الزاويتين بين u, v وبين u, w على التناظر. وعليه يكون التحويل من المحاور الديكارتية الى المحاور المثلثية بموجب القاعدتين التاليتين :

$$\begin{aligned} x &= u + v \cos \alpha + w \cos \beta; \\ y &= v \sin \alpha + w \sin \beta. \end{aligned} \quad (5.14.1)$$

كما ان مشتقات x, y الجزئية بالنسبة الى w, v, u تكون كالآتي :

$$\begin{aligned} x_u &= 1; & x_v &= \cos \alpha; & x_w &= \cos \beta; \\ y_u &= 0; & y_v &= \sin \alpha; & y_w &= \sin \beta. \end{aligned} \quad (a)$$

كذلك ان الدالة (x, y) يمكن اعتبارها دالة الى المتغيرات w, v, u من خلال الدوال المتوسطة (x, y) المعرفة بموجب المعادلات (5.14.1) اما مشتقاتها فيمكن الحصول عليها بموجب قاعدة تفاضل الدوال المركبة. وهكذا بموجب المعادلات (a) يحصل :

$$\begin{aligned} z_u &= z_x x_u + z_y y_u = z_x; \\ z_v &= z_x x_v + z_y y_v = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha; \\ z_w &= z_x x_w + z_y y_w = z_x \cos \beta + z_y \sin \beta. \end{aligned}$$

وبتريع هذه المؤثرات ينتج :

$$z_{uu} = z_{xx}; \quad (b)$$

$$z_{vv} = z_{xx} \cos^2 \alpha + 2z_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + z_{yy} \sin^2 \alpha; \quad (c)$$

$$z_{ww} = z_{xx} \cos^2 \beta + 2z_{xy} \sin \beta \cos \beta + z_{yy} \sin^2 \beta. \quad (d)$$

وبتعويض المعادلة (b) في المعادلات (c) . (d) ثم بحذف z_{xy} بين المعادلتين الاخيرتين عندئذ تصبح z_{yy} على الصورة التالية :

$$z_{yy} = \frac{z_{uu} 2 \cos \alpha \cos \beta \sin (\beta - \alpha) - z_{vv} \sin 2\beta + z_{ww} \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin (\beta - \alpha)},$$

وعليه وبموجب المعادلة (b) يحصل :

$$\begin{aligned}\nabla^2 z &= z_{zz} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv} \\ &= \frac{z_{uu} \sin 2(\beta - \alpha) - z_{vv} \sin 2\beta + z_{uv} \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin (\beta - \alpha)}.\end{aligned}\quad (5.14.2)$$

وللشبكة المثلثية المتساوية الاضلاع والشائعة الاستعمال

$$\alpha = 60^\circ; \quad \beta = 120^\circ; \quad \beta - \alpha = 60^\circ;$$

حيث

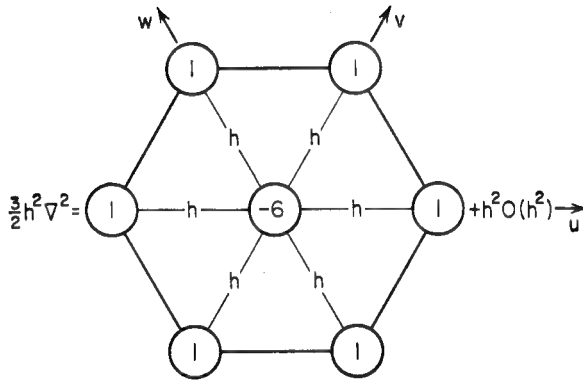
$$\sin \alpha = \sin \beta = \sin (\beta - \alpha) = \sin 2\alpha = \sin 2(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

تؤول المعادلة (5.14.2) الى

$$\nabla^2 z = \frac{2}{3}(z_{uu} + z_{vv} + z_{uv}).\quad (5.14.3)$$

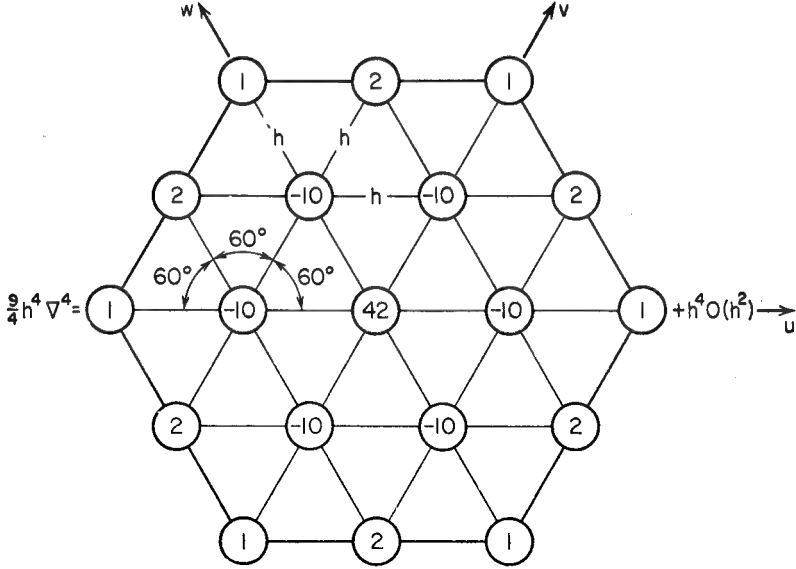
ويظهر مؤثر الفرق ∇^2 المناظر في المحاور الاحداثية المثلثية ذات الاضلاع المتساوية (اوسدسي) المقتنى بموجب المؤثر $h^2 D^2$ في شكل 2.8a مطبقا على الاتجاهات w, u, v في الشكل 5.45 وبتربيع مؤثر شكل 5.45 نحصل على المؤثر ∇^4 في المحاور الاحداثية المثلثية ذات الاضلاع المتساوية المعطاة في الشكل 5.46



شكل (5-46) ∇^2

فمثلا مؤثر شكل 5.45 يمكن استعماله في تعيين قيم الدالة التوافقية z الواردة قيمها تقع الحدود المسدسية في الشكل 5.47 ان الدالة التوافقية تحقق ، بالتعريف معادلة لابلاس

$$\nabla^2 z = 0$$



شكل (٤٦-٥) ∇^4 في المحاور الاحداثية ذات الأضلاع المتساوية

ولذلك فان قيم z عند نقاط الارتكاز في المجال المسدسي تحقق مجموعة المعادلات

at (1) $2z_2 + 4z_3 - 6z_1 = 0$; في

at (2) $z_1 + 2z_3 - 6z_2 + 200 + 200 + 300 = 0$; في

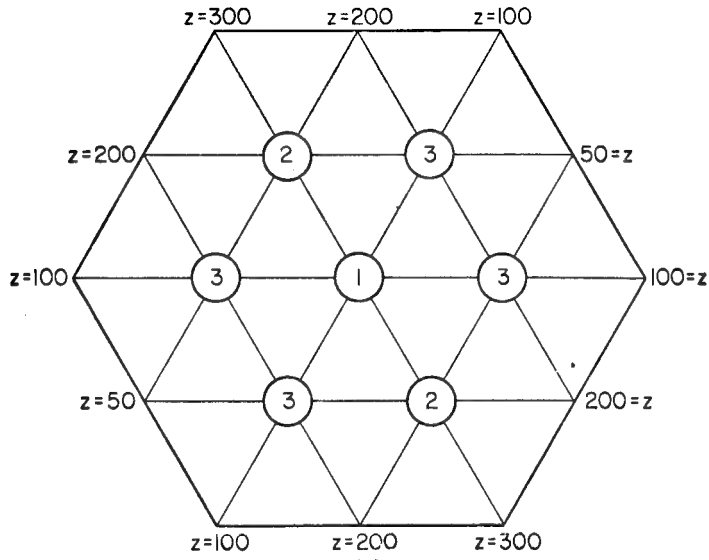
at (3) $z_1 + z_2 + z_3 - 6z_3 + 50 + 100 + 200 = 0$, في

ots are

التي جذورها

$$z_1 = 156; \quad z_2 = 189; \quad z_3 = 139.$$

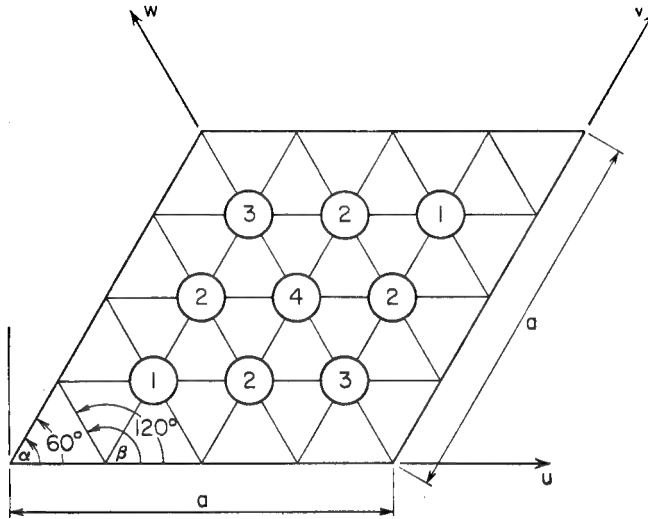
ان z يمكن تفسيرها وكأنها قيم درجة الحرارة داخل صفيحة مسدسة والتي حدودها قد احتفظ بها في درجات حرارة شكل 5.47 اوانها احداثيات غشاء لاضغط له مثل الشكل 5.47 احداثياته الرأسية عند الحدود مدونة.



شكل (٥-٤٧)

ان الصفیحة المائلة التي وردت فی البند 5.12 بزاوية ميل $30^\circ = \text{angle of skew}$ $(\alpha = 60^\circ)$ يمكن تغطيتها ايضا بشبكة مثلثة متساوية الاضلاع فاذا كانت $n = 4$ مثلا فانه يجب استخدام مؤثر الشكل 5.45 عند النقاط الاربعة من الشكل (5.48) لكي تحل معادلتنا بواسان (c) البند 5.12 ان حل الانظمة المناظرة يعطينا انحراف المركز central

deflection



شكل (٥-٤٨)

$$w_0 \Big|_4 = 0.00283 \frac{qa^4}{D},$$

بينما نجد ان الانحرافات الناتجة من جعل $n = 10, n = 8$ هي على التوالي :

$$w_0 \Big|_8 = 0.00262 \frac{qa^4}{D}; \quad w_0 \Big|_{10} = 0.00260 \frac{qa^4}{D}.$$

كما ان قيم الانحرافات المستوفاة هي :

$$w_0 \Big|_{4,8} = 0.00255 \frac{qa^4}{D}; \quad w_0 \Big|_{8,10} = 0.00256 \frac{qa^4}{D};$$

$$w_0 \Big|_{4,8,10} = 0.00256 \frac{qa^4}{D}.$$

وبفرض ان المعامل 0.00256 هو الصحيح نجد انه من المفيد ان نلاحظ انه تم الحصول عليه من حل ست عشرة معادلة آنية على الاقل بينما نجد ان القيمة الناتجة بموجب المحاور المائلة وباستعمال نقطتين . ثم اربع نقاط ارتكاز والاستيفاء (0.00248) تختلف بمقدار ثلاثة في المائة فقط عنها .

ان هذه النتائج لتدل على وجوب تغطية كل مجال بشبكة نقاط الارتكاز الاكثر تكيفا لحل المسألة كي نضمن الحصول على نتائج ذات كفاءة عددية عالية.

5.15 مؤثر بواسان المحسن في المحاور الاحداثية المثلثية :

An Improved Poissonian Operator in Triangular Coordinates

بالامكان الحصول على حل محسن لمعادلة بواسان في المحاور الاحداثية المثلثية بطريقة مشابهة لتلك التي استعملت في البند 5.11

لنأخذ مجموع ثلاثة من الفروق الثانية في الاتجاهات u, v, w للدالة $z(x, y)$ كما نأخذ اول حدين من مفكوك مشتقاتها :

$$(\delta_u^2 + \delta_v^2 + \delta_w^2)z \doteq h^2(z_{uu} + z_{vv} + z_{ww}) + \frac{h^4}{12}(z_{uuuu} + z_{vvvv} + z_{wwww}), \quad (a)$$

التي بموجب المعادلة (5.14.3) تصبح :

$$(\delta_u^2 + \delta_v^2 + \delta_w^2)z \doteq \frac{3}{2} h^2 \nabla^2 z + \frac{h^4}{12}(z_{uuuu} + z_{vvvv} + z_{wwww}). \quad (b)$$

وتتبع مؤثر المعادلة (5.14.3)

$$\nabla^4 z = \nabla^2(\nabla^2 z) = \frac{4}{8}[z_{uuuu} + z_{vvvv} + z_{wwww} + 2z_{uuvv} + 2z_{vuvw} + 2z_{wuuu}],$$

يصبح مجموع المشتقات الرابعة غير المختلطة :

$$z_{uuuu} + z_{vvvv} + z_{wwww} = \frac{9}{4}\nabla^4 z - 2(z_{uuvv} + z_{vuvw} + z_{wuuu}). \quad (c)$$

$$\alpha = 60^\circ; \quad \beta = 120^\circ; \quad \alpha + \beta = 180^\circ;$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \beta = -\frac{1}{2}; \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (d)$$

كذلك فان المشتقات المختلطة mixed يمكن الحصول عليها بدلالة المشتقات بالاتجاهين y, x كالآتي :

$$z_u = z_x; \quad z_v = \frac{1}{2}z_x + \frac{\sqrt{3}}{2}z_y; \quad z_w = -\frac{1}{2}z_x + \frac{\sqrt{3}}{2}z_y;$$

$$z_{uv} = \frac{1}{2}z_{xx} + \frac{\sqrt{3}}{2}z_{xy}; \quad z_{vw} = -\frac{1}{4}z_{xx} + \frac{3}{4}z_{yy};$$

$$z_{wu} = -\frac{1}{2}z_{xx} + \frac{\sqrt{3}}{2}z_{xy};$$

$$z_{uuvv} = \frac{1}{4}z_{xxxx} + \frac{\sqrt{3}}{2}z_{xxyy} + \frac{3}{4}z_{xxyy};$$

$$z_{vvvv} = \frac{1}{16}z_{xxxx} - \frac{3}{8}z_{xxyy} + \frac{9}{16}z_{yyyy};$$

$$z_{wvvu} = \frac{1}{4}z_{xxxx} - \frac{\sqrt{3}}{2}z_{xxyy} + \frac{3}{4}z_{xxyy}.$$

ويصبح مجموعها

$$z_{uuvv} + z_{vvvv} + z_{wvvu} = \frac{9}{16}(z_{xxxx} + 2z_{xxyy} + z_{yyyy}) = \frac{9}{16}\nabla^4 z,$$

وبموجب المعادلة (c) تؤول الى

$$z_{uuuu} + z_{vvvv} + z_{wwww} = \frac{9}{4}\nabla^4 z - 2\frac{9}{16}\nabla^4 z = \frac{9}{8}\nabla^4 z. \quad (e)$$

وبالتعويض عن المعادلة (e) في المعادلة (b) نحصل على

$$\frac{3}{2}h^2\nabla^2z \doteq (\delta_u^2 + \delta_v^2 + \delta_w^2)z - \frac{3}{2}h^4\nabla^4z \quad (5.15.1)$$

ان معادلة بواسان الواجب حلها :

$$\nabla^2z = f, \quad (5.15.2)$$

تعطينا المعادلتين :

$$h^2\nabla^2z = h^2f; \quad \nabla^4z = \nabla^2f, \quad (f)$$

حيث تصبح المعادلة الاولى بموجب المعادلة (5.15.1)

$$(\delta_u^2 + \delta_v^2 + \delta_w^2)z = \frac{3}{2}h^2f + \frac{3}{2}h^4\nabla^2f. \quad (5.15.3)$$

ان لمعادلة الفرق البواسانية المحسنة هذه خطأ من المرتبة h^4 وتحتوي على نفس نقاط ارتكاز مؤثر الشكل 5.45. ويعتبر هذا التحسين . لذلك تعميماً لاسلوب نوميروف Noumerov

ولاجل تقييم تأثير التصحيح $\frac{3}{2}h^4\nabla^2f$ في المعادلة (5.15.3) نأخذ الصفحة المسدسة الشكل المسدسة بساطة والتي طول ضلعها a وهي تحت تأثير ثقل منتظم q . وتحقق المعادلتين (e) و (f) من البند 5.12 فاذا جعلنا $a = h$ وسمينا w_0, M_0 للوزن والانحراف عند مركز الصفحة نحصل بدون التصحيح على

$$\begin{aligned} -6M_0 &= \frac{3}{2}a^2(-q); & M_0 &= 0.250qa^2; \\ -6w_0 &= \frac{3}{2}a^2\left(-\frac{M_0}{D}\right); & w_0 \Big|_1 &= 0.0625 \frac{qa^4}{D}. \end{aligned} \quad (g)$$

وبالمثل اذا كانت $h = a/2$ واعتبرنا w_1, M_1 للوزن والانحراف عند نقاط الارتكاز الستة التي تقع حول المركز نحصل بدون تصحيح على :

$$-4M_1 + M_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2(-q); \quad 6M_1 - 6M_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2(-q),$$

والتي منها

$$M_0 = 0.208qa^2; \quad M_1 = 0.146qa^2,$$

ولذلك يكون

$$\begin{aligned} -4w_1 + w_0 &= \frac{3}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \left(-0.146 \frac{qa^2}{D} \right); \\ 6w_1 - 6w_0 &= \frac{3}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \left(-0.208 \frac{qa^2}{D} \right), \end{aligned}$$

والتي منها ينتج :

$$w_0 \Big|_2 = 0.0356 \frac{qa^4}{D}. \quad (h)$$

ان استيفاء h^2 بين (g) و (h) يعطينا :

$$w_0 \Big|_{1,2} = 0.0266 \frac{qa^4}{D}. \quad (i)$$

وعند استعمال التصحيح مع $h = a$ نحصل على

$$\text{for } f_0 = -q \text{ عندما } \nabla^2 f_0 = 0; \quad M_0 = 0.250qa^2;$$

$$\text{for } f_0 = -\frac{M_0}{D} \text{ عندما } \nabla^2 f_0 = \frac{2}{3a^2} (-6) \left(-0.250 \frac{qa^2}{D} \right) = \frac{q}{D};$$

$$-6w'_0 = \frac{3}{2} a^2 \left(-0.250 \frac{qa^2}{D} \right) + \frac{3}{32} a^4 \left(\frac{q}{D} \right) \therefore w'_0 \Big|_1 = 0.0469 \frac{qa^4}{D}. \quad (j)$$

$$n = a/2,$$

بالمثل عندما يكون

$$M_0 = 0.208qa^2; \quad M_1 = 0.146qa^2;$$

$$\nabla^2 f_0 = \frac{q}{D}; \quad \nabla^2 f_1 = \frac{q}{D};$$

$$w'_0 \Big|_2 = 0.0323 \frac{qa^4}{D}. \quad (k)$$

ان استيفاء h^4 بين (j) و (k) يعطي :

$$w'_0 \Big|_{1.2} = 0.313 \frac{qa^4}{D}.$$

ان الفرق بين w'_0 و w_0 هو 33 بالمائة عندما $h=a$ وهو عشرة بالمائة عندما $h=a/2$ كما ان الفرق بين القيمتين المستوفاة extrapolated هو خمسة عشر بالمائة .

5.16 مسائل سريان الحرارة العارض (المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة)

Transient Heat-flow Problems (Parabolic Partial Differential Equations)

المسألة الزمنية - الفضاءية الاحادية البعد : سريان الحرارة في قضيب

[a] ONE-DIMENSIONAL SPACE TIME PROBLEM: HEAT FLOW IN A BAR
سخن قضيب ذو مقطع ثابت طوله I . وسطحه الجانبى معزول الى درجة حرارة u_0 ثم
برد بعزل طرف القضيب في $x=0$ وحفظ الطرف عند $x=L$ في درجة حرارة قدرها a
درجة. يطلب تحديد تغير درجة الحرارة مع الزمن لجميع نقاط القضيب أي لكافة
 $0 < x < L$

ان المعادلة التفاضلية التي تتحقق بدرجة الحرارة $u(x,t)$ عند نقطة ما مثل x من القضيب
في وقت t . هي على الشاكلة التالية :

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (5.16.1)$$

حيث K هو ثابت الانتشارية الحرارية في القضيب (thermal diffusivity of the bar)

$$K = \frac{k'}{c\delta}, \quad (5.16.2)$$

علما بان k' هي التوصيل الحراري thermal conductivity وان c هي الحرارة النوعية وان δ كثافة الكتلة (لكل وحدة من وحدات الحجم) القضيب. فضلا عن ذلك فان درجة الحرارة يجب ان تحقق الشروط الحدودية التالية :

$$u_z(0,t) = 0; \quad (5.16.4)$$

$$u(L,t) = a, \quad (5.16.3)$$

والشرط الاولي :

$$u(x,0) = u_0. \quad (5.16.5)$$

المعادلات (5.16.3), (5.16.1) الى (5.16.5) تؤلف مسألة قيم حدية زمنية فضائية احادية البعد. وتتسم هذه المسألة بأنها من طراز خاص من القيم الحدية للمتغير الفضائي ومن طراز القيم الاولية لمتغير الزمن.

ومن المناسب ان يعالج مثل هذه المسألة بصيغة لا بعدية nondimensional form باستعمال التحويل التالي :

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{t} = \frac{Kt}{L^2}; \quad \bar{u} = \frac{u - a}{u_0 - a}, \quad (5.16.6)$$

وبعد اسقاط (الخطوط) في المتغيرات تصبح مسألة القيم الحدية :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}; \quad \begin{matrix} 0 < \bar{x} < 1 \\ \bar{t} > 0 \end{matrix} \quad (5.16.7)$$

$$\bar{u}_x(0, \bar{t}) = 0;$$

$$\bar{u}(1, \bar{t}) = 0; \quad (5.16.8)$$

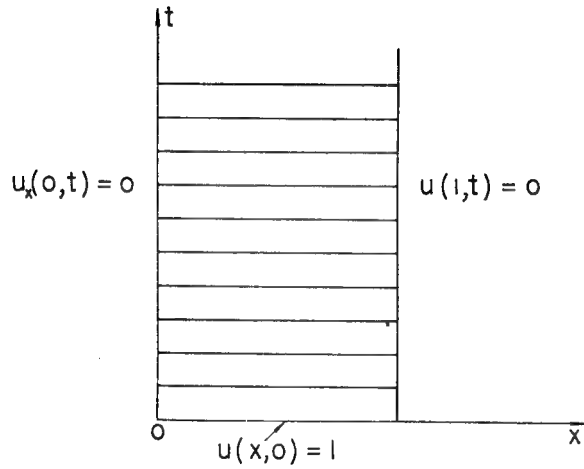
$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = 1.$$

ومن الافضل ان يناقش تكامل هذا النمط من المسائل باعتبار الحل كائنا في المستوى الزمني الفضائي المكون من المتغيرين المستقلين t, x

لنأخذ شريحة لانهاية كما في شكل 5.49 والمعروفة بالحدود $0 < x < 1, t > 0$ كما نأخذ أيضا وبقيم الدالة المعرفه عند الحدود بالشروط الحدودية الواردة في المعادلات (5.16.8).

تصبح المسألة واحدة ينشرفيها الحل. انطلاقا من القيمة 1 عند $t = 0$ ومن القيم الحدية عند الحدود $x = 1, x = 0$ تنتشر باتجاه الاحداثي t عند جميع النقاط x في المستوى x, t .

وبتذبذب باتجاه المحور في جميع النقط في المستوى x, t ولذا لك تصبح المسألة عبارة عن تعيين انتشار حل مفتوح النهاية "open-ended" solution في المستوى على عكس حل معادلة ناقصة elliptic التي هي معرفة في مجال مغلق. ان الفروق مناسبة في حل هذا النمط من المسائل لنأخذ شبكة مستطيلة الشكل في المستوى x, t حيث تعرف الكمية u_{ij} على أنها درجة الحرارة في النقطة $x = x_i$ في الوقت $t = t_j$



شكل (٤٩ - ٥)

لنجعل من اصل الشبكة $\Delta x = h$ في الفضاء $\Delta t = k$ وبالنسبة الى الزمن (شكل 5.50) باستعمال مؤثر الفرق المركزي من المرتبة h^2 في احداثي الفضاء وباستعمال مؤثر الفرق الامامي الاول $[e = 0(k)]$ في احداثي الزمن .

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}; \quad (5.16.9)$$

$$u_t = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}, \quad (5.16.10)$$

تصبح المعادلة (5.16.7) معادلة الفرق التالية :

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} = \frac{1}{\alpha} [u_{i,j+1} - u_{i,j}], \quad (5.16.11)$$

$$\alpha = \frac{k}{h^2}. \quad \text{حيث } \dots \quad (5.16.12)$$

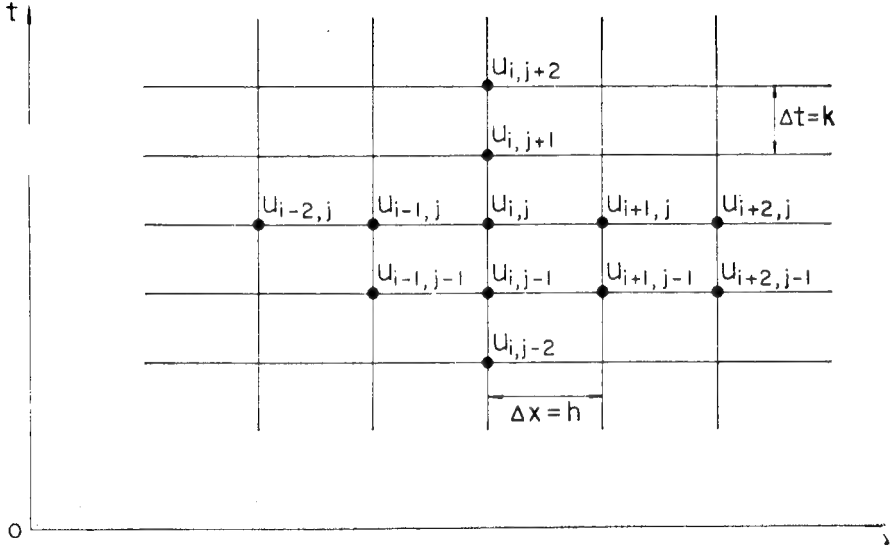
نشتق معادلة المواورة التي تسمح بتعيين درجة الحرارة عند النقطة $x = x_i$ في الزمن $t = t_{j+1}$

من المعادلة (5.16.11) وذلك بحلها بالنسبة الى الكمية $u_{i,j+1}$

$$u_{i,j+1} = \alpha u_{i+1,j} + (1 - 2\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i-1,j} \quad (5.16.13)$$

ان المعادلة (5.16.13) تسمح بايجاد قيمة $u_{i,j+1}$ بدلالة درجات الحرارة عند

النقاط x_i, x_{i+1}, x_{i-1} في الزمن t_j



شكل (٥-٥٠) Finite difference grid. شبكة الفرق المحدودة

وفي الحالة الخاصة عندما $\alpha = \frac{1}{2}$ فإن درجة الحرارة $u_{i,j}$ لا يحتاج إليها استخراج قيمة $u_{i,j+1}$ ونبسط معادلة الموازنة recurrence equation الى :

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j}]. \quad (5.16.14)$$

المعادلة (5.16.14) يتبين ان درجة الحرارة $u_{i,j+1}$ في الزمن t_{j+1} يمكن ايجاد قيمتها بتوسط averaging درجات الحرارة عند النقاط المحيطة x_{i-1}, x_{i+1} في الزمن السابق t_j .

لنفرض ان القصب في مثالنا الحاضر مغطى بشبكة في المستوى الزمني الفضائي بحيث ان

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad k = \frac{1}{8}; \quad h = \frac{1}{2}. \quad (5.16.15)$$

ان الشكل (5.51) يوضح تمديد الحل في المستوى x, t ان شروط الحدود المعزولة عند $x = 0$ يتطلب ان تتلاشى u هناك أي :

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0 \quad \text{at } i = 0, \quad (5.16.16)$$

ومن هذه فان صيغة التمديد prolongation formula تكون :

$$u_{+1,j} = u_{-1,j}. \quad (5.16.17)$$

ان الشروط الحدودية تكون درجة الحرارة صفرا ادخلت عند الحدود $x = 1$ والقيمة

الاولية لدرجة الحرارة $u(x,0) = 1$ ادخلت في النقاط $x = \frac{1}{2}, x = 0$

ان عدم الاتصال discontinuity في النقطة (1,0) من المستوى x, t والواقعة بين القيمة الحدودية $u=0$ وبين القيمة الاولى $u=1$. جعلت اختياريا مساوية متوسط درجة الحرارة $\frac{1}{2}$.

	t			
t=7/8	3/32	1/8	3/32	0
t=3/4	1/8	3/16	1/8	0
t=5/8	3/16	1/4	3/16	0
t=1/2	1/4	3/8	1/4	0
t=3/8	3/8	1/2	3/8	0
(j+3)				
t=1/4	1/2	3/4	1/2	0
(j+2)				
t=1/8	3/4	1	3/4	0
(j+1)				
t=0	1	U=1	1	1/2
(j)	$x=-\frac{1}{2}$ (i-1)	$x=0$ (i)	$x=\frac{1}{2}$ (i+1)	$x=1$ (i+2)

Fig. 5.51. $u_{i,j}$ for $\alpha = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{8}$.

النتائج مبينة في الشكل (5.51) لغاية الزمن $t = \frac{7}{8}$. كما ان نتائج مماثلة اُقتنيت باستعمال شبكة اكثر دقة مع الاحتفاظ تكون $\alpha = \frac{1}{2}$ أي

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad h = \frac{1}{4}; \quad k = \frac{1}{32}, \quad (5.16.18)$$

موضحة في الشكل 5.52

ومن المهم ملاحظة انه بالامكان استعمال استيفاء h^2 في مثل هذه المسألة. ولنسبة $\alpha = k/h^2$ ثابتة فان خطوة الزمن k متناسبة مع h^2 ولذا لك فان الخطأ $O(k)$ يكون $O(h^2)$. وعليه يمكن استعمال استيفاء h^2 في أية نقطة $x = x_i$ في المستوى الزمني الفضائي التي عندها تعرف درجة الحرارة من خلال تقريبين مختلفتين يناظران α نفسها لحساب النتائج.

ان شرط كون التقريبات المتتالية للـ α المعنية تزايد أو تناقص برتبة monotonically لا يزال سارياً.

	t					
t = $\frac{1}{2}$.3404	.3693	.3404	.2611	.1410	0
$\frac{15}{32}$.3693	.3988	.3693	.2819	.1530	0
$\frac{7}{16}$.3988	.4326	.3988	.3059	.1650	0
$\frac{13}{32}$.4326	.4668	.4326	.3301	.1792	0
$\frac{3}{8}$.4668	.5068	.4668	.3584	.1934	0
$\frac{11}{32}$.5068	.5469	.5068	.3867	.2099	0
$\frac{5}{16}$.5469	.5938	.5469	.4199	.2266	0
$\frac{9}{32}$.5938	.6406	.5938	.4531	.2461	0
$\frac{1}{4}$.6406	.6953	.6406	.4922	.2656	0
$\frac{7}{32}$.6953	.7500	.6953	.5313	.2891	0
$\frac{3}{16}$.7500	.8125	.7500	.5781	.3125	0
$\frac{5}{32}$.8125	.8750	.8125	.6250	.3438	0
$\frac{1}{8}$.8750	.9375	.8750	.6875	.3750	0
$\frac{3}{32}$.9375	1.000	.9375	.7500	.4375	0
$\frac{1}{16}$	1.000	1.000	1.000	.8750	.5000	0
$\frac{1}{32}$	1.000	1.000	1.000	1.000	.7500	0
t = 0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1/2
	x = -1/4	x = 0	x = 1/4	x = 1/2	x = 3/4	x = 1

Fig. 5.52. $u_{i,j}$ for $\alpha = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{32}$.

شكل (٥-٢٥)

كمثال على استعمال استيفاء h^2 -extrapolation نأخذ درجة الحرارة عند النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ في المستوى الزمني الفضائي .
اذ من الشكلين 5.51, 5.52 نجد ان :

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad h = \frac{1}{2}; \quad u_{(1,1)} = 0.2500;$$

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad h = \frac{1}{4}; \quad u_{(1,1)} = 0.2611.$$

باستعمال المعاملات اللازمة لاستيفاء h^2 الواردة في الجدول 2.12 . نجد ان درجة الحرارة المستوفاة تتعين بما يأتي :

$$u_{(4,4)} \Big|_{2,4} = 1.3333(0.2611) - 0.3333(0.2500) = 0.2648.$$

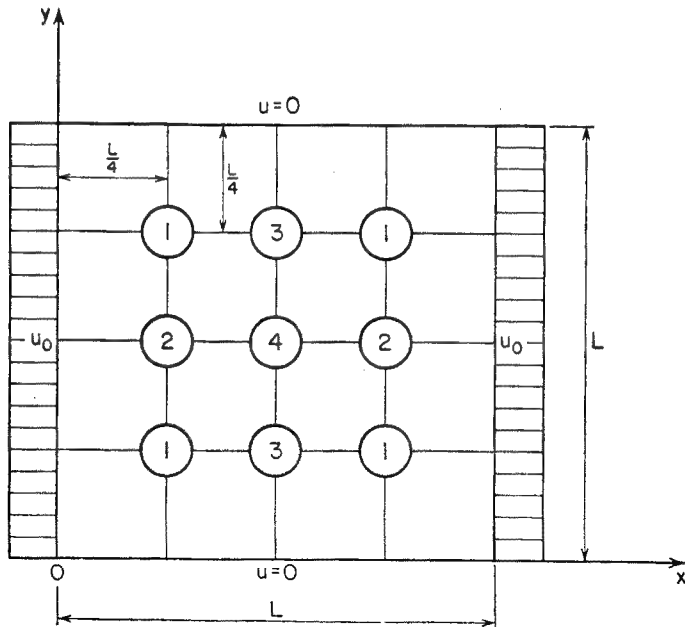
ان السؤال البالغ الاهمية عن استقرار الحل العددي لمسائل الانتشار propagation الناتجة من المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة parabolic سوف نتناوله في البند 5.17 وسيجد القارئ في ذلك البند اسلوباً لتعين قيم α التي لا يتبعد الحل العددي باستعمالهما.

[b] المسألة الزمنية – الفضائية الأحادية البعد :

TWO-DIMENSIONAL SPACE-TIME PROBLEM:

سريان الحرارة في صفيحة HEAT FLOW IN A PLATE

صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها L . درجة حرارتها في البداية صفر . رفعت درجة حرارة ضلعين متقابلين بينهما فجأة الى u_0 بينما احتفظ بدرجة حرارة الضلعين الاخرين عند الصفر (شكل 5.53) والمطلوب تعيين تغير درجة الحرارة مع الزمن لنقاط تقع داخل الصفيحة



شكل (5-53)

المعادلة التفاضلية التي تحقق بدرجة الحرارة $u(x,y,t)$ في نقطة ما x,y في الصفحة في الزمن t هي المعادلة التفاضلية البعد المرافدة للمعادلة (5.16.1) وهي على الصورة التالية

$$K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5.16.19)$$

وفضلا عن ذلك فان درجة الحرارة يجب ان تحقق الشروط الحدودية التالية :

$$u(0,y,t) = u(L,y,t) = u_0; \quad u(x,0,t) = u(x,L,t) = 0, \quad (5.16.20)$$

والشرط الاول التالي :

$$u(x,y,0) = 0. \quad (5.16.21)$$

ان المسألة التي نحن بصدد حلها ممكنة الحل باستعمال الفروق المحدودة finite differences

وبطريقة مماثلة للطريقة التي استعملت في حل المسألة الزمنية الوحيدة البعد والتي وردت في هذا البند من قبل باتباع اقتراح من Schmidt Bender تغطي الصفحة المربعة بشبكة مربعة ذات بعد $h = L/n$ وفترة زمنية قدرها $\Delta t = k$ (شكل 5.53) وباستعمال الرمز $u_{i,j}$ درجة الحرارة عند النقطة i في الزمن $t = t_j$ وباستعمال مؤثر الفرق المركزي للشكل 5.3b بدلا عن $\nabla^2 u$ ومؤثر الفرق الامامي من الشكل (2.5a) بدلا من المشتقة $\partial u / \partial t$ تصبح المعادلة (5.16.19) على الصورة التالية :

$$u_{a,j} + u_{b,j} + u_{r,j} + u_{l,j} - 4u_{i,j} = \frac{1}{\alpha} (u_{i,j+1} - u_{i,j}), \quad (5.16.22)$$

علما بان :

$$\alpha = \frac{Kk}{h^2}. \quad (5.16.23)$$

تشتق معادلة الموازنة التي تسمح بتعيين درجة الحرارة في النقطة i في الزمن t_{j+1} من المعادلة (5.16.22) ولذلك لحلها بالنسبة الى $u_{i,j+1}$:

$$u_{i,j+1} = \alpha(u_{a,j} + u_{b,j} + u_{r,j} + u_{l,j}) + (1 - 4\alpha)u_{i,j}. \quad (5.16.24)$$

وعلى غرار ما فعلناه في حالة البعد الواحد . يمكن تحقيق قدرا كبيرا من التبسيط باختيار قيمة k بحيث تكون $\alpha = Kk/h^2 = \frac{1}{4}^*$ بمعنى ان :

$$k = \frac{h^2}{4K}; \quad \alpha = \frac{1}{4}. \quad (5.16.25)$$

وفي هذه الحال تؤول المعادلة (5.16.24) الى الصيغة التالية : -

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{4}(u_{a,j} + u_{b,j} + u_{r,j} + u_{l,j}). \quad (5.16.26)$$

ان درجة الحرارة عند النقطة i في الزمن t_{j+1} تصبح عبارة عن متوسط درجات الحرارة في نقاط الارتكاز الاربعة المجاورة في الزمن السابق t_j . وكما هو مبين بالمعادلة (5.16.25) لتحسين تعيين قيم درجة الحرارة مع الزمن . الذي يتطلب تصغير قيمة k . يستلزم تصغيرا في قيمة h وعليه حصول زيادة في عدد نقاط الارتكاز . بحيث يتطلب الحصول على درجات حرارة دقيقة لقيم صغيرة من t مشبكاً دقيقاً .

الصفیحة المربعة في المثال الحالي غطيت بشبكة حجم عينها $L/4$ وعليه فان قيمة الفترة الزمنية k تكون :

ان درجة الحرارة عند الاضلاع المتقابلة $x = 0, x = L$ قد فرضت مساوية 10,000

② $x = L/4$ $y = L/2$				④ $x = L/2$ $y = L/2$			
$n = t/k$	u	6250	∞	$n = t/k$	u	5000	∞
0	0	6242	19	0	0	4990	19
1	2500	6240	18	1	0	4985	18
2	3750	6235	17	2	1250	4980	17
3	4375	6230	16	3	2500	4970	16
4	5000	6220	15	4	3125	4960	15
5	5312	6210	14	5	3750	4941	14
6	5625	6191	13	6	4062	4921	13
7	5781	6171	12	7	4375	4882	12
8	5937	6132	11	8	4531	4843	11
9	6015	6093	10	9	4687	4765	10
			$n = t/k$				$n = t/k$

شكل (١٥-٥)

① $x = L/4$ $y = L/4$				③ $x = L/2$ $y = L/4$			
$n = t/k$	u	5000	∞	$n = t/k$	u	3750	∞
0	0	4995	19	0	0	3742	19
1	2500	4992	18	1	0	3741	18
2	3125	4990	17	2	1250	3735	17
3	3750	4985	16	3	1875	3730	16
4	4062	4980	15	4	2500	3720	15
5	4375	4970	14	5	2812	3710	14
6	4531	4960	13	6	3125	3691	13
7	4687	4941	12	7	3281	3671	12
8	4765	4921	11	8	3437	3632	11
9	4843	4882	10	9	3515	3593	10
			$n = t/k$				$n = t/k$

ان قيم درجات الحرارة المتتالية عند نقاط الارتكاز المدونة في الجدول (5.15) وهي تخص برقع الصفیحة جرى حسابها باخذ المعدلات المتتالية وفقاً للمعادلة (5.16.26) مع ملاحظة ان توزيع درجة الحرارة : هو توزيع متمائل حول كل من $x = L/2$, $y = L/2$ وهنا ينبغي العلم بأن قيم درجة الحرارة الواردة في الجدول (5.15) تقرأ بالتحرك نحو الاسفل لغاية $t = 9k$ ثم الى الاعلى فيما يلي ذلك. ان آخر قيمة من قيم درجة الحرارة التي تناظر $t = \infty$ هي قيمة الحالة المطردة (steady-state) حيث جرى حسابها بطريقة الارخاء وباستعمال طرق البند 5.5 .

الجدول يوضح الحقيقة التي فحواها بان التعيين الصحيح لتغير درجة الحرارة بعد $t = 0$ مباشرة يتطلب استعمال عين mesh بالغة الدقة . اما المسائل بتوصيل الحرارة الزمنية - الفضائية الثلاثي البعد بتوصيل الحرارة الزمنية الفضائية المماثلة فانه يمكن حلها بتمديد الطرق التي استعملت في المثالين السابقين وباستعمال مؤثر ثلاثي - الابعاد اي $\nabla^2 u$ واستعمال مؤثر الفرق الامامي في الزمن . فانه يمكن الحصول على معادلات المتوارة recurrence لدرجة الحرارة عند النقطة i في الزمن t_{i+1} ومنها يمكن حساب توزيع درجة الحرارة في الجسم .

5.17 استقرار الحل العددي لمعادلة التوصيل الحراري احادية البعد (المعادلات المكافئة)

Stability of the Numerical Solution of the One- dimensional Heat Conduction Equation (Parabolic Equations,

ان استقرار الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية من النوع المكافئ يتقرر بتعيين المدى في قيم النسبة (α) التي يكون فيها الحل غير متباعد . مثال ذلك في مسألة البند (5.16a) تبقى عن القيمة النهائية للنسبة $\alpha = k/h^2$ التي تضمنحل لها درجة الحرارة في حل الفروق المحدودة في النهاية .

ان مسألة القيم الحدودية تحت الدراسة توضح بصيغة معادلة الفرق على الصورة التالية :

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} = \frac{1}{\alpha} [u_{i,j+1} - u_{i,j}]; \quad (5.17.1)$$

$$u_{-1,j} = u_{1,j};$$

$$u_{N,j} = 0; \quad (5.17.2)$$

$$u_{i,0} = 1, \quad (5.17.3)$$

حيث $1/h = N$ هي عدد التقسيمات بالاتجاه x

ولغرض التبسيط تنقل نقطة الاصل للمحور الاحداثي x فتجعلها عند نهاية القضيب ويحتفظ بها في درجة حرارة = صفر.

$$x' = 1 - x, \quad (5.17.4) \quad \text{باستعمال التحويل}$$

لذا مسألة القيم الحدودية الاصلية تتخذ الصورة التالية :

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} = \frac{1}{\alpha} [u_{i,j+1} - u_{i,j}]; \quad (5.17.5)$$

$$u_{0,j} = 0; \quad (5.17.6)$$

$$u_{N-1,j} = u_{N+1,j};$$

$$u_{i,0} = 1. \quad (5.17.7)$$

ان معادلة الفرق (5.17.5) هي معادلة خطية ذات معاملات ثابتة يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات [انظر مثلا التحليل العددي لكيزروكونز ص 328 مكروهيل او التحليل الهندسي تأليف كراندل ص 380 للناسر نفسه].

$$u_{i,j} = X_i T_j \quad (5.17.8) \quad \text{بجعل}$$

في المعادلة (5.17.5) نحصل على المعادلة

$$\alpha \left[\frac{X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}}{X_i} \right] = \frac{T_{j+1} - T_j}{T_j} = -\lambda, \quad (5.17.9)$$

حيث λ ثابت اختياري . لان كلا من طرفي المعادلة (5.17.9) دالة فقط لمتغير مستقل واحد هما t, x . ان حل المعادلتين التفاضليتين الاعتياديتين الناتجتين من المعادلة (5.17.9)

$$X_{i+1} - \left[2 - \frac{\lambda}{\alpha} \right] X_i + X_{i-1} = 0; \quad (5.17.10)$$

$$T_{j+1} - (1 - \lambda) T_j = 0, \quad (5.17.11)$$

قد تم بموجب الطرق التي شرحت في البند 3.13 وهما على التوالي :

$$X_i = C_1 \sin \gamma i + C_2 \cos \gamma i; \quad (5.17.12)$$

$$T_j = (1 - \lambda)^j, \quad (5.17.13)$$

$$\cos \gamma = 1 - \frac{\lambda}{2\alpha}. \quad (5.17.14)$$

وبادخال X_i, T_j في شروط المعادلة (5.17.6) نحصل على :

$$u_{0,j} = 0 \quad \therefore \quad X_0 = 0; \quad C_2 = 0; \quad (5.17.15)$$

$$u_{N-1,j} = u_{N+1,j} \quad \therefore \quad X_{N-1} = X_{N+1} \quad (5.17.16)$$

$$\therefore \quad \sin (N - 1)\gamma = \sin (N + 1)\gamma.$$

ان متطلبات المعادلة (5.17.16) تتحقق اذا اتخذت γ القيم المتقطعة

$$\gamma_n = \frac{2n - 1}{N} \frac{\pi}{2} \quad (1 \leq n \leq N). \quad (5.17.17)$$

ويحل المعادلة (5.17.14) للمتغير λ وباستعمال المعادلة (5.17.17) نحصل على .

$$(1 - \lambda)^j = \left\{ 1 - 2\alpha \left[1 - \cos \frac{(2n - 1)\pi}{2N} \right] \right\}^j. \quad (5.17.18)$$

ان الحل الاكثر عمومية المحقق لمعادلة الفرق [المعادلة (5.17.5)] وللشروط الحدودية
لمعادلة (5.17.6) بجمع الحلول الفردية $u_{i,j}$ individual solutions لكل قيمة من
قيم γ_n

$$u_{i,j} = \sum_{n=1}^N C_n \left\{ 1 - 2\alpha \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2N} \right] \right\}^j \sin \frac{(2n-1)\pi i}{2N}, \quad (5.17.19)$$

حيث يجب تقنين قيم المعاملات C_n من الشرط الاولي للمعادلة (5.17.7) وبملاحظة
ان العبارة التالية :

$$G_n = 1 - 2\alpha \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2N} \right] \quad (5.17.20)$$

تظهر في كل حد من حدود متسلسلة المعادلة (5.17.19) يتبين ان استقرار الحل يتم
السيطرة عليه بقيم الدالة G_n التي هي دائما اقل من 1 حيث نلاحظ بان الحدود من النمط
التي تظهر في المعادلة (5.17.20) تلعب نفس الدور في الاليات السالبة في الزمن t في
الحل التحليلي لسريان الحرارة التي تحل بنقل المتغيرات ، اذا كانت $G_n > 0$ ، فان الحل
يضمحل باطراد اما اذا كان الحل الذي تتعاقب فيه الحدود موجبة مرة غير ان المتسلسلات
تضمحل في نهاية المطاف مرضياً فان قيمة G_n التي تقل عن 1- فان المتسلسلات سوف تذبذب
متزايدة في السعة amplitude وعلية فان قيمة G_n النهاية لغرض الاستقرار هي 1- ،
اذا كانت شروط المسألة الاولى n المناظر الى G_n ، واذا كان اخطاء التدوير العشوائية
random round-off errors في الحل العددي تثير هذا المنوال في الحالات التي قيمة
 $C_n = 0$ نظريا فان الحل العددي سوف يتباعد لقيم $G_n > -1$

ان القيمة النهائية G_n التي تجعل الحد الذي رتبته n مستقرا يتعين بحل المعادلة
(5.17.20) عندما $G_n = -1$

$$\alpha_n = \frac{1}{1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2N}} \quad (5.17.21)$$

وللحصول على الاستقرار لجميع قيم n التي تنحصر بين الواحد وبين N فان قيمة α

التي استعملت في التكامل العددي يجب ان تكون اصغر من اصغر قيم n ، ولنسمها N

$$\alpha_N = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{2N}} \quad (5.17.22)$$

وبالمثل لكي نضمن الاضمحلال الثابت للحد رتبته n من الحل فان قيمة G_n النهائية يجب ان تكون صفرا ولذلك يكون

$$\bar{\alpha}_n = \frac{1}{2 \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2N} \right]} \quad (5.17.23)$$

ولكي نصف الاضمحلال الثابت للحد كله فانه يجب ان تكون اصغر من اصغر قيم $\bar{\alpha}_n$ اي اصغر من $\bar{\alpha}_N$

$$\bar{\alpha}_N = \frac{1}{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{2N} \right)} = \frac{1}{2} \alpha_N \quad (5.17.24)$$

الجدول 5.16 يشتمل على قيم α_N و $\bar{\alpha}_N$ باعتبار كل منهما دالة الى N قيمة $\alpha = \frac{1}{2}$ ، التي استعملت في البند 5.16a وذلك حيث تكون قيمة $N = 2$ وحيز N تعطي حلا مستقرا غير انه متذبذب .

جدول (١٦ - ٥)

N	α_N	$\bar{\alpha}_N$
2	0.5858	0.2929
3	0.5359	0.2680
4	0.5198	0.2599
5	0.5125	0.2563
6	0.5086	0.2543
∞	0.5000	0.2500

ان استقرار مسألة سريان الحرارة في الفضاء الثنائي والثلاثي الابعاد يمكن تجريبه بوسائل مماثلة تماما لما سبق .

5.18 مسألة الوتر المهتز (المعادلات التفاضلية الجزئية الزائدية)

The Vibrating String Problem (Hyperbolic Partial Differential Equations)

يمتد وتر مرن قابل للانثناء تماما طوله L بين نقطتين ثابتتين في مستواقي (شكل 5.54). وقد اعطي الوتر ازاحة رأسية أولية $y(x,0) = f(x)$ ثم اطلق من حالة السكون في الزمن $t = 0$ مع الاحتفاظ بنهايته ثابتتين . المطلوب تعيين الانحراف $y(x,t)$ لاية نقطة من نقاط الوتر في اي زمن $t = 0$ عندما تكمن ذبذبات الوتر صغيرة .

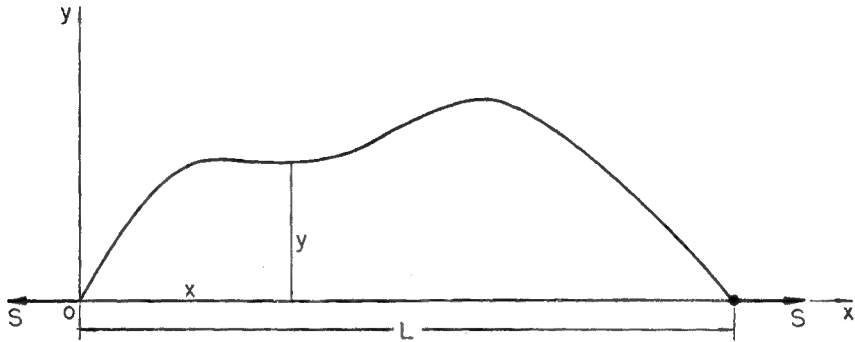
المعادلة التفاضلية التي تحقق الانحراف $y(x,t)$ عند اية نقطة x تقع على الوتر في اي زمن t يمكن التعبير عنها كالآتي :

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (5.18.1)$$

حيث

$$a = \sqrt{S/\rho} \quad (5.18.2)$$

تدل على سرعة انتشار الامواج في الوتر كما ان S (lb) تدل على الشد المؤثر على نهايتي الوتر كي يكون متوترا وان ρ (lb sec²/in.²) هي كتلة وحدة الطول من الوتر.



شكل (5-54)

وفضلا عن ذلك فان الانحراف $y(x,t)$ يجب ان يحقق الشروط الحدودية.

$$y(0,t) = 0; \quad (5.18.3)$$

$$y(L,t) = 0, \quad (5.18.4)$$

$$y(x,0) = f(x); \quad (5.18.5)$$

$$y_t(x,0) = 0. \quad (5.18.6)$$

ان المعادلة (5.18.1) الزائدية مع الشروط الحدودية والشروط الاولية للمعادلات (5.18.3) ، (5.18.6) تولف مسألة قيم حدودية زمنية - فضائية احادية البعد . انها من نمط القيم الحدودية للمتغير الفضائي نمط القيم الاولية للمتغير الزمني .

وكما في حالة المعادلات التناقضية والمكافئة فان الفروق المحدودة يمكن استعمالها في حل المعادلات الزائدية . لناخذ شبكة مستطيلة الشكل في المستوى x, t واجعل $y_{i,j}$ هو الانحراف عند النقطة $x = x_i$ في الوقت $t = t_j$ كذلك اجعل فاصلة المشبك $\Delta x = h$ grid spacing في الفضاء و $\Delta t = k$ في الزمن . باستعمال مؤثرات الفرق المركزية من المرتبة k^2, h^2 في الفضاء والزمن على التوالي .

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h^2}; \quad (5.18.7)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{k^2}, \quad (5.18.8)$$

المعادلة (5.18.1) سيؤول الى معادلة الفرق الثالثة

$$y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j} - \frac{1}{\alpha^2} [y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}] = 0, \quad (5.18.9)$$

حيث :

$$\alpha^2 = \frac{a^2 k^2}{h^2}. \quad (5.18.10)$$

معادلة المواورة recurrence formula التي تسمح بتعيين الازاحة عند $x = x_i$ في الزمن $t = t_{j+1}$ قد اشتقت من المعادلة (5.18.9) وذلك نحلها بدلالة $y_{i,j+1}$

$$y_{i,j+1} = \alpha^2 [y_{i+1,j} + y_{i-1,j}] + 2(1 - \alpha^2)y_{i,j} - y_{i,j-1}. \quad (5.18.11)$$

من الواضح ان تبسيط المعادلة (5.18.11) يحصل بجعل $1 = \alpha$

$$y_{i,j+1} = [y_{i+1,j} + y_{i-1,j}] - y_{i,j-1}. \quad (5.18.12)$$

وبجعل فاصلة نقاط الارتكاز بالاتجاه x كالآتي :

$$h = \frac{L}{N}, \quad (5.18.13)$$

تصبح الشروط الحدودية والاولية للمعادلات من (5.18.3) وحتى (5.18.6) بصيغة الفرق المحدودة كالآتي :

$$y_{0,j} = 0; \quad (5.18.14)$$

$$y_{N,j} = 0; \quad (5.18.15)$$

$$y_{i,0} = f_i; \quad (5.18.16)$$

$$y_{i,1} = y_{i,-1}. \quad (5.18.17)$$

معادلة الانطلاق بتعويض المعادلة (5.18.17) في المعادلة (5.18.12) عندما نحصل على :

$$y_{i,1} = \frac{1}{2} (y_{i+1,0} + y_{i-1,0}) = \frac{1}{2} (f_{i+1} + f_{i-1}). \quad (5.18.18)$$

ان المعادلة (5.18.12) مع قاعدة الانطلاق . والمعادلات (5.18.16) (5.18.18) والشروط الحدودية للمعادلات (5.18.14) (5.18.15) تسمح بتعيين الازاحات $y_{i,j}$ مثال ذلك :

اذا علم $y_{i,j}$ لجميع نقاط الارتكاز في الزمن $j = 1, j = 0$ فان الكميات $y_{i,2}$ تحسب بموجب المعادلة (5.18.12) حيث ان القيمتين عند النهايتين وهما $y_{N,2}, y_{0,2}$ تتعينان بموجب المعادلتين (5.18.14) . (5.18.15) وهكذا بصورة عامة فان ابتداء من اي وقت $t = t_j$ حيث كل من القيمتين $y_{i,j-1}, y_{i,j}$ تكونا معلومتين فان القيمة $y_{i,j+1}$ يمكن حسابها وذلك بالاشتغال الى الامام في الوقت مستعملين معادلة الموازنة (5.18.12).

ان هذا الاسلوب يمثل حلا ينتشر الى الخارج في الزمن خلال منطقة مفتوحة . نتحدد بـ $x = L, x = 0$ مطلقا من الشروط الاولية للمسألة (انظر شكل 5.1b) .

(*)R.) Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, "Über die partieller Differenzengleichungen der mathematischen Physik," *Math. Ann.* **100**, 32-74 (1928).

† The analytical solution of the problem is given by

ان كوارنت Courant وفردريش Friedrichs وليوى Lewy قد درسوا استقرار حل الفروق المحدودة لهذه المسألة وبينوا ان الاستقرار يعتمد على النسبة α ووفق الطريقة التالية:

(أ) اذا كانت $\alpha > 1$ فان تقرب الفروق المحدودة غير مستقر وعدم الاستقرار يزداد عنفا بزيادة قيم α .

(ب) اذا كانت $\alpha = 1$ فان تقرب الفروق المحدودة يكون مستقرا. فضلا عن ذلك فان نتائج هذا التقرب مطابقة لكل مسألة متطابقة مع حل مسألة القيم الحدودية المتصلة الطبيعية [حل المسألة التحليلي يتعين بالمعادلة التالية علما بان f الدالة التي تظهر في شروط المعادلة (5.18.5) الاولى]

$$y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)],$$

(ج) اذا كانت $\alpha < 1$ فان تقرب الفروق المحدودة مستقر غير ان دقة الحل تتناقص بتناقص قيمة α .

ومن المفيد ان نلاحظ اننا نحصل على حل صحيح باحكام *rigorously correct* عندما $\alpha = 1$. بينما يبقى الحل مستقرا الا انه يتناقص في الدقة كلما صغرت قيم α .

ان مسألة الدقة يرتبط مباشرة بنظرية المميزات *theory of characteristics* للمعادلات الزائدية.

من الممكن الاثبات بصورة عامة . على ان الدقة المثلى *decreases accuracy* نحصل عليها من الفروق المحدودة عندما تكون مميزات حل الفروق المحدودة متطابقة مع مميزات حل المعادلة التفاضلية الجزئية الزائدية . ان حقيقة الحصول على حل دقيق من الفروق المحدودة للمسألة (الواردة في السؤال) تتبع من خاصية فريدة لمعادلة الموجة وهي ان مميزات $x+at$, $x-at$ هي خطوط مستقيمة . اما بالنسبة الى المعادلات الزائدية المعقدة التي لها بوجه عام مميزات منحنية فان الدقة المثلى نحصل على استعمال احداثيات انحنائية والتي تنظر باقرب ما يمكن المميزات الانحنائية للمعادلات التفاضلية الجزئية بدلا من استعمال المحاور المتعامدة الثابتة من النوع الذي استعمل في هذه المسألة.

وفي مسائل عملية عديدة وجد انه من الملائم استعمال اقواس الميزات المنحنية كمحاور احداثية في شبكة الفروق المحدودة للمنظومة الزائدية.

انظر مثلاً *

S. H. Crandall, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956, pp. 358-365 and p. 396 ff.

5.19 مسألة قيم حدودية حاوية على $\nabla^4 z$

A Boundary Value Problem Involving

ان مسألة القيم الحدودية للانحرافات (a) التي تخص صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها (a) مثبتة من جميع اطرافها تتعين بالمعادلة التالية :

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}; \quad w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{عند الحدود} \quad (5.19.1)$$

حيث q يساوي الحمل لكل وحدة مساحة من الصفيحة

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad \text{الجسوة الانثنائية للصفيحة}$$

سمك الصفيحة h

معامل يونك ونسبة بواسان على التوالي لمادة الصفيحة E, ν

اتجاه العمود على الحدود n

المسألة (5.19.1) تؤول الى صيغة لابعدية باستعمال التحويل التالي :

$$x = \xi a; \quad y = \eta a; \quad w(x, y) = \frac{qa^4}{D} z(\xi, \eta), \quad (a)$$

وهذه تعطي :

$$\nabla^4 z = 1; \quad z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \quad \text{on the boundary,} \quad (5.19.2)$$

عند الحدود

حيث اخذ ∇^4 بالنسبة الى ξ, η

ان الحل العددي للمسألة (5.19.2) ينتج بالتعويض عن z بمؤثر الفرق المركزي للشكل 5.3c ذي الشبكة المربعة الذي عينه $1/n =$

ان الشروط الحدودية بموجب المعادلة (4.1.1) تنص على ان قيم z عند نقاط الارتكاز خارج الحدود مباشرة تساوي قيم z عند النقاط الكائنة داخل الحدود مباشرة وعلى نفس العمود واذا ابتدئنا بجعل $n = 2$ (شكل 5.55) فان المعادلة (5.19.2) تعطي ما يأتي :

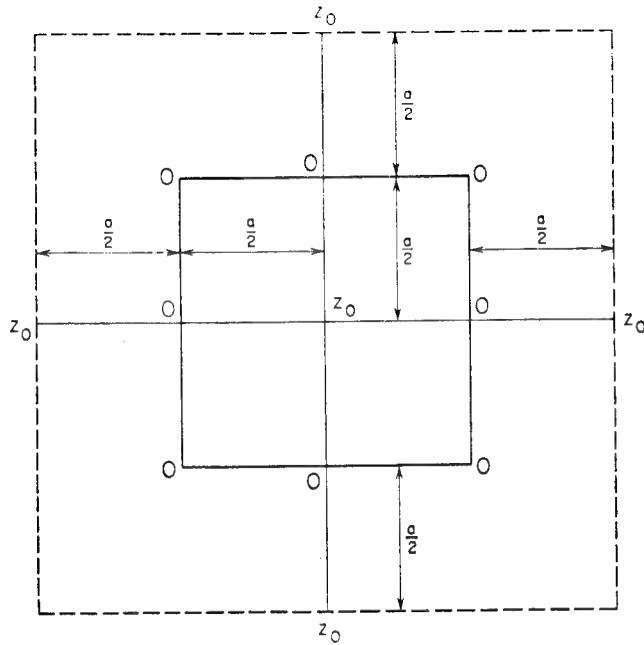
$$(z_0 + z_0 + z_0 + z_0) + 2 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 20z_0 = \frac{1}{2^4},$$

منها ينتج

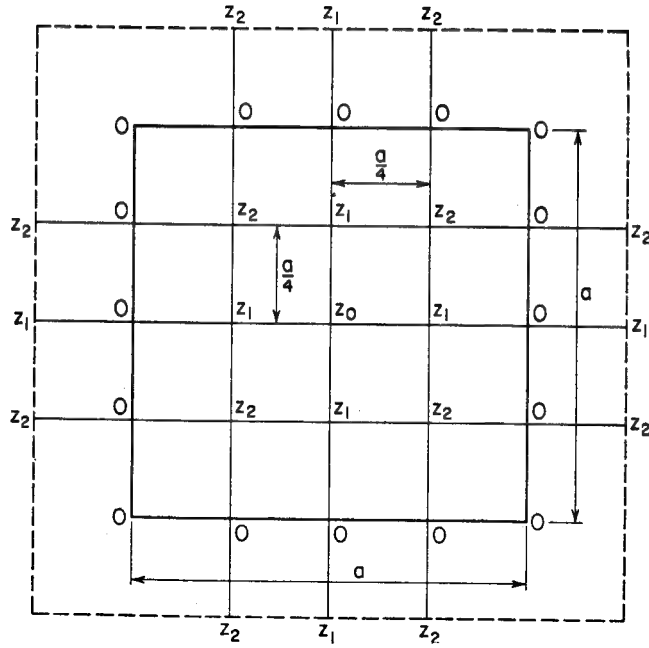
$$z_0 \Big|_2 = \frac{1}{2^4 \cdot 24} = \frac{1}{384}$$

وعندما $n = 4$ فان تطبيق المعادلة (5.19.2) عند نقاط الشكل 5.56 تعطي عند :

$$20z_0 - 32z_1 + 8z_2 = \frac{1}{4^4};$$



شكل (5-56)



شكل (٥-٢٦)

وعند (1) : $-8z_0 + 26z_1 - 16z_2 = \frac{1}{4^4};$

وعند (2) : $2z_0 - 16z_1 + 24z_2 = \frac{1}{4^4},$

ومنها وبموجب نهج كاوس

$$z_0 \Big|_4 = \frac{0.461}{4^4}; \quad z_1 \Big|_4 = \frac{0.309}{4^4}; \quad z_2 \Big|_4 = \frac{0.209}{4^4}.$$

وبالمثل ان كانت $n = 8$ فان :

$$z_0 \Big|_8 = 5.857/8^4$$

حيث يصبح الانحراف عند مركز الصفحة حيث $n = 8, 4, 2, \nu = 0$ بموجب
المعادلة (a)

$$w_0 \Big|_2 = \frac{12(1 - 0.3^2)}{384} \frac{qa^4}{Eh^3} = 0.0284 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = -106\%),$$

$$w_0 \Big|_4 = \frac{12(1 - 0.3^2) \cdot 0.461}{256} \frac{qa^4}{Eh^3} = 0.0197 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = -43\%),$$

$$w_0 \Big|_8 = \frac{12(1 - 0.3^2) \cdot 5.857}{4096} \frac{qa^4}{Eh^3} = 0.0156 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = -13\%).$$

ان النسب المئوية للاخطاء e قد حست من قيمة الحل التسلسلي والذي استخرجه (نوموشينكو) كما ان الاستيفاءات من نمط h^2 قد استعملت على قيم التقريبات (انظر 2.13) وتعطي :

$$w_0 \Big|_{2,4} = 0.0167 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = -21\%);$$

$$w_0 \Big|_{4,8} = 0.0142 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = -2.9\%),$$

$$w_0 \Big|_{2,4,8} = 0.0140 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad (e = -1.4\%).$$

5.20 مسائل القيم المميزة ثنائية البعد

Two-dimensional Characteristic Value Problems

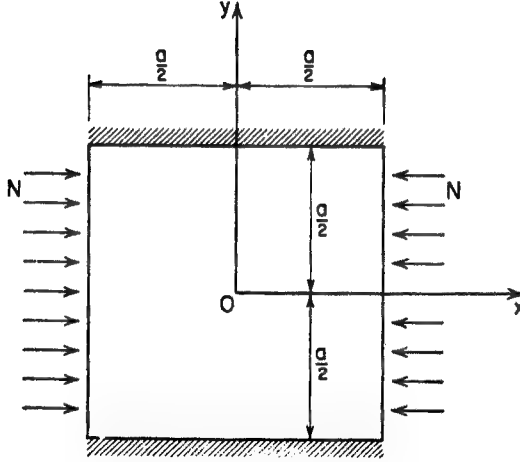
لأخذ مربع الشكل طول ضلعه a مسند ببساطة على حافتين متقابلتين ومثبت على الحافتين الاخرتين. تؤثر على اللوح قوة منتظمة ضاغطة قدرها N (لكل وحدة طول) عمودية على حافتي الاسناد البسيطتين وتعمل في نفس مستوى اللوح (شكل 5.57).

باختبار اتجاه المحور x موازاً للحافتين المثبتتين مع جعل نقطة الاصل عند مركز اللوح، من الممكن اثبات ان انحراف اللوح w عند النقطة (x, y) يحقق المعادلة التفاضلية (راجع نظرية الاستقرار ص 337) التالية :

$$\nabla^4 w + \frac{N}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (5.20.1)$$

حيث D هي الجسوة الانشائية flexural rigidity للوح المطلوب استخراج اصغر قيمة N التي تسبب حول (buckling) اللوح. اي قيمة التي لن يكون الانحراف

w فيها مطابقا للصفر . مع تحقيق الشروط الحدودية للاسناد البسيط :



شكل (٥-٥٧)

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm \frac{a}{2} \quad (5.20.2)$$

وشروط الانعدام للدوران complete lack of rotation

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = \pm \frac{a}{2} \quad (5.20.3)$$

تعاد المعادلة (5.20.1) اولا الى صيغة لابعدية بموجب التحويل التالي :

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad (a)$$

وبعد ضربها a^4 نصبح :

$$\nabla^4 w + \frac{Na^2}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad (5.20.4)$$

علما بان ∇^4 قد استخرجت بالنسبة الى ξ, η ومن ثم تغطي اللوح بشبكة مربعة حجم $1/n$ فيها $1/n^4$ بالمقدار $h^4 = 1/n^4$ واستعمال مؤثر الشكل 5.3c أي $\nabla^4 w$ واستعمال مؤثر المعادلة (5.2.2) أي $\partial^2 w / \partial \xi^2$. فان معادلة الفروق التي تناظر المعادلة

(5.20.4) تقتني بالصيغة الجزيئية molecular form التالية :

$$\begin{array}{c}
 (1) \\
 | \\
 (2) - (-8) - (2) \\
 | \\
 (1) - (-8) - (20) - (-8) - (1) \\
 | \quad | \\
 (2) - (-8) - (2) \\
 | \\
 (1)
 \end{array}
 + \left(\frac{k}{n^2}\right) (1) - (-2) - (1) = 0 \quad (5.20.5)$$

$$k = \frac{Na^2}{D} \quad (5.20.6) \quad \text{حيث :}$$

ان تطبيق المعادلة (5.20.5) عند نقاط الارتكاز الداخلية يؤدي الى مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية المتجانسة في مجاهيل هي ازاحات الارتكاز w_i التي يجب ان يطابق الصفر لكي تختلف قيم w_i عن الصفر. فان اصغر قيمة N التي تجعل محددة المعادلات (5.20.5) تساوي الصفر هي اصغر قيمة حرجة للقوة الضاغطة .

ولكي تطبق المعادلة (5.20.5) على نقط الارتكاز داخل الحدود مباشرة . فان الانحراف deflections يجب ان يكون معلوما عند نقاط ارتكاز وهمية خارج الحدود مباشرة . ان هذا الانحراف معطى بدلالة الانحرافات عند نقاط الارتكاز داخل الحدود مباشرة وبموجب الشروط الحدودية . وفي الحقيقة بموجب المعادلات (4.1.1) تصبح المعادلات (5.20.2)

$$w_i = 0; \quad w_i = -w_r \quad \text{at } \xi = \pm \frac{1}{2}, \quad (5.20.7)$$

بينما تعطي المعادلة (5.20.3)

$$w_i = 0; \quad w_a = w_b \quad \text{at } \eta = \pm \frac{1}{2}. \quad (5.20.8)$$

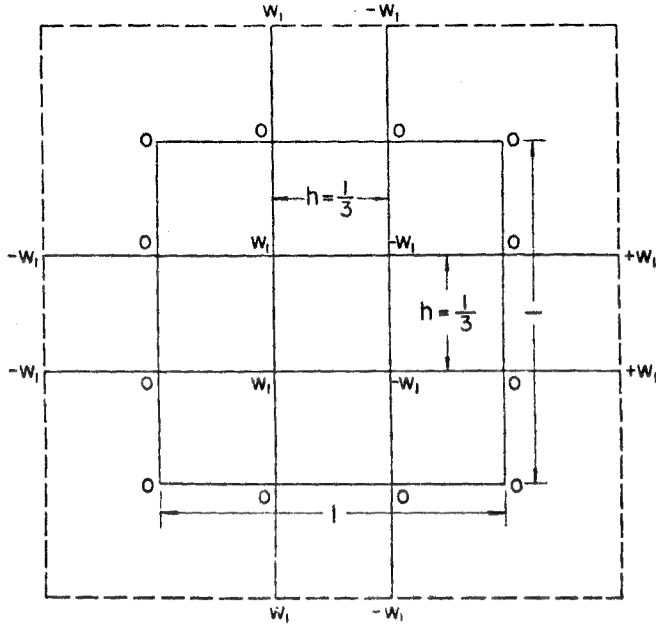
لنبدأ بجعل $n = 3$ وانحرافات الشكل 5.58 غير متناظرة

$$(-w_1 + w_1 + 0 + 0) + 2(0 + 0 + 0 - w_1) - 8(0 + 0 + w_1 - w_1)$$

$$+ 20w_1 + \frac{k_s}{9}(0 - 2w_1 - w_1) = 0, \quad \text{نحصل على :}$$

(*) هامش ص ٢٧٢

ان الانحرافات المتناظرة باتجاه x تعطي حمل حدل أعلى .



شكل (٥-٥٨)

أو

$$w_1 \left(18 - \frac{k_3}{3} \right) = 0,$$

ومن هذه يحصل :

$$k_3 = 54 = 5.471\pi^2.$$

(b)

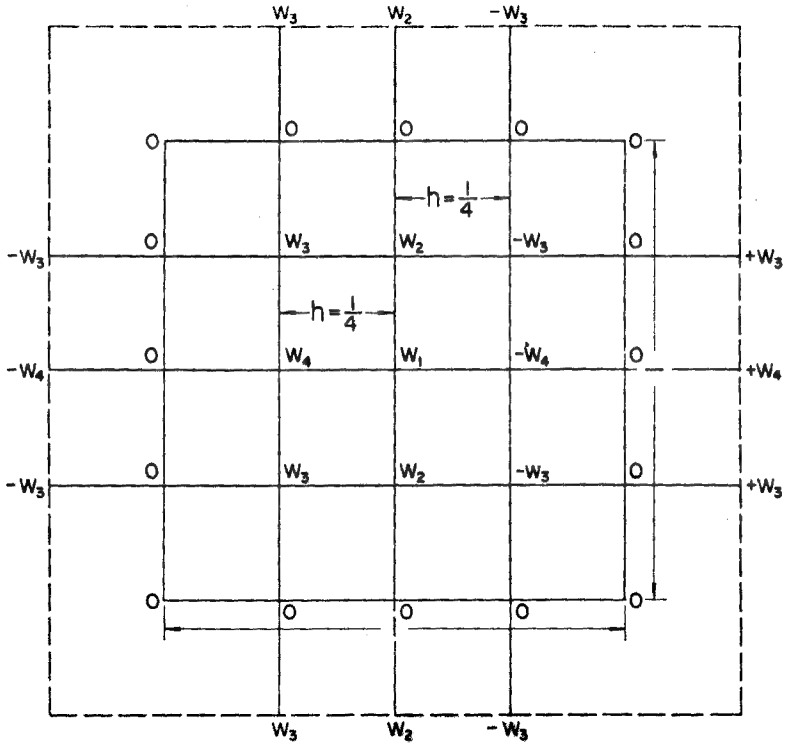
وبجعل $n = 4$ والانحرافات غير المتناظرة للشكل 5.59 نحصل على معادلات الجدول

5.17

Table 5.17

w_1	w_2	w_3	w_4
$20 - 2\gamma$	-16	0	0
-8	$22 - 2\gamma$	0	0
2	$\gamma - 8$	$20 - 2\gamma$	-8
$\gamma - 8$	4	-16	$18 - 2\gamma$

جدول (٥-١٧)



شكل (٥-٥٩)

وبجعل محددة هذه المجموعة من المعادلات مساوية الصفر ينتج :

$$(20 - 2\gamma)[(20 - 2\gamma)(22 - 2\gamma) - 8 \times 16][(20 - 2\gamma)(18 - 2\gamma) - 8 \times 16] = 0,$$

نجعل من العامل الثالث على اصغر جذر $\gamma = 3.821$ ولذلك

$$k_4 = 61.136 = 6.193\pi^2.$$

(c)

ان القيمة المستوفاه extrapolated التي تبلغ $k_{3,4} = 7.121\pi^2$ تزيد قليلا عن قيمة k الصغرى التي استخرجها (تمينوشينكو) التي تحدث للوح النسبة بين ضلعيه a/b وانحرافات متناظرة وعلى هذا فان القيمة المستخرجة لايمكن ان تختلف كثيرا عن قيمة x الحقيقية .

5.21 حل المعادلات التفاضلية الجزئية بفصل المتغيرات والفروق المحدودة

The Solution of Partial Differential Equations by Separation of the Variables and Finite Differences

غالبا مايكون من المفيد ان نجمع بين الطريقة التقليدية لفصل المتغيرات وبين الاساليب العددية الحديثة كي نحل المعادلات التفاضلية الجزئية . ان هذه الطريقة المختلطة ستوضح بتطبيقها على مسألة الحدل من البند السابق . حيث ان ضلعين من اللوح المربع الشكل تستند استنادا بسيطا وان الحمل الاصغر للحدل يقابل التشويه غير المتناظر . بالاتجاه w فان من المنطق ان نفرض الانحراف x على الشاكلة التالية :

$$w(x,y) = Y(y) \sin \frac{2\pi}{a} x, \quad (5.21.1)$$

حيث $Y(y)$ هي دالة غير معلومة من y لوحدها . ان دالة الانحراف w deflection function يفي بالشروط الحدودية عند الحدود البسيطة المسند المعادلات (5.20.2) . وعند تعويضها في معادلة التوازن [المعادلة (5.20.1)] فانها الى معادلة تفاضلية عادية بدلالة Y :

$$Y^{iv} - 8 \frac{\pi^2}{a^2} Y'' + \left(\frac{16\pi^4}{a^4} - \frac{N}{D} \frac{4\pi^2}{a^2} \right) Y = 0. \quad (5.21.2)$$

وبتعويض المعادلة (5.21.1) في الشروط الحدودية على طول الحافات الثلاثة [المعادلة (5.20.3)] نحصل على شروط Y الحدودية .

$$Y = 0; \quad Y' = 0 \quad \text{at} \quad y = \pm \frac{a}{2}. \quad (5.21.3)$$

وهكذا فان مسألة القيمة المميزة الجزئية للمعادلات (5.20.1), (5.20.2), (5.20.3) تعاد الى مسألة القيمة المميزة العادية للمعادلات (5.21.2), (5.21.3).

ولكي نحل المسألة الاخيرة بصيغة لابعدية نستعمل التحويل $y = a\eta$ حيث نحصل على :

$$\frac{d^4 Y}{d\eta^4} - 8\pi^2 \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \left(16\pi^4 - 4\pi^2 \frac{Na^2}{D} \right) Y = 0; \quad (5.21.4)$$

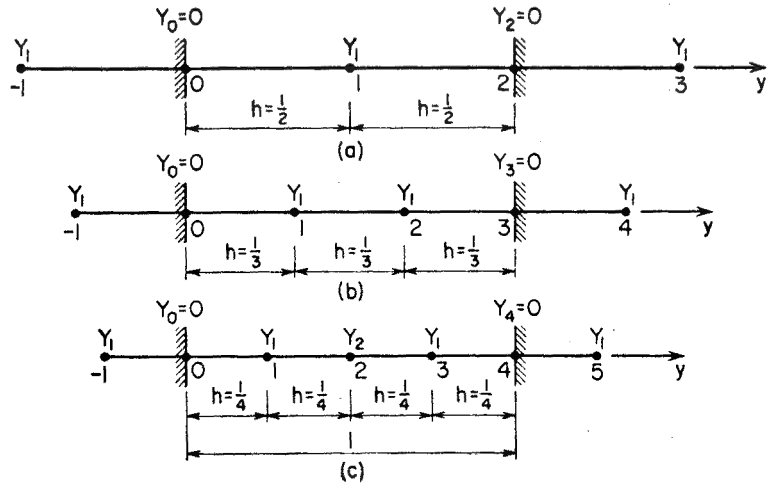
$$Y(\eta) = 0; \quad \frac{dY}{d\eta} = 0 \quad \text{at} \quad \eta = \pm \frac{1}{2}. \quad (5.21.5)$$

بضرب المعادلة (5.21.4) في $h^4 = 1/n^4$ وتعويض تعابير الفروق المركزية لمشتقات y بالمعادلات (2.7.16) نحصل على معادلة الفرق بدلالة Y :

$$Y_{bb} - \left(\frac{8\pi^2}{n^2} + 4 \right) Y_b + \left(6 + \frac{16\pi^2}{n^2} + \frac{16\pi^4}{n^4} - \frac{4\pi^2 k}{n^4} \right) Y_i - \left(\frac{8\pi^2}{n^2} + 4 \right) Y_a + Y_{aa} = 0, \quad (5.21.6)$$

حيث k تتعين بموجب المعادلة (5.20.6) . ان الشروط الحدودية تتطلب :

$$Y_a = Y_b \text{ at } n = \pm \frac{1}{2}. \quad (5.21.7)$$



شكل (٥-٦٠)

فاذا ابدأنا بجعل $n = 2$ وبقيم Y كما في الشكل (5.60a) . حيث رسم المحور y أفقياً لتيسير الامر . فان المعادلة (5.21.6) تعطي :

$$Y_1 + 0 + \left(6 + \frac{16\pi^2}{4} + \frac{16\pi^4}{16} - \frac{4\pi^2}{16} k_2 \right) Y_1 + 0 + Y_1 = 0,$$

ومن هذه يكون :

$$k_2 = 5.95\pi^2. \quad (a)$$

وبجعل $n = 3$ ونقيم Y كما هي (5.600) و (5.41.0) نحصل .

$$Y_1 + 0 + \left(6 + \frac{16\pi^2}{9} + \frac{16\pi^4}{81} - \frac{4\pi^2}{81} k_3\right) Y_1 - \left(\frac{8\pi^2}{9} + 4\right) Y_1 + 0 = 0,$$

ومنها يكون :

$$k_3 = 6.36\pi^2. \quad (b)$$

وعندما نبدأ بجعل $n = 4$ واستعمال قيم Y كما في الشكل 60 نحصل على المعادلتين

$$Y_1 + 0 + \left(6 + \frac{16\pi^2}{16} + \frac{16\pi^4}{256} - \frac{4\pi^2}{256} k_4\right) Y_1 - \left(\frac{8\pi^2}{16} + 4\right) Y_2 + Y_1 = 0;$$

$$0 - \left(\frac{8\pi^2}{16} + 4\right) Y_1 + \left(6 + \frac{16\pi^2}{16} + \frac{16\pi^4}{256} - \frac{4\pi^2}{256} k_4\right) Y_2 - \left(\frac{8\pi^2}{16} + 4\right) Y_1 + 0 = 0.$$

ان الجذر الاصغر لمحددة هذه المعادلات يساوي :

$$k_4 = 6.70\pi^2. \quad (c)$$

وعند استخدام استيفاءات h^2 في المعادلات (a) ، (b) ، (c) نحصل على النتائج التالية :

$$k_{2,3} = 6.69\pi^2; \quad k_{3,4} = 7.14\pi^2.$$

ان الحل بفصل المتغيرات يعطينا نتائج بنفس مرتبة الدقة كتلك التي تحصل عليها من حل الفروق المحدودة الثنائية البعد الوارد في البند 5.20 الا انها اقل عناء حيث ان تعيين قيمة k_4 مثلاً يتضمن محددة من المرتبة الثانية في الحل الاحادي البعد وعلى محددة من المرتبة الرابعة في الحل الثنائي البعد .

تمارين

5.1 () اشتق مؤثرات الفرق المناظرة الى المؤثرات التفاضلية التالية وبدلالة الفروق الامامية ذات الخطأ من المرتبة h^2

(a) $h^2 D_{xy}$, (b) $h^2 \nabla^2$, (c) $h^4 D_{xyxy}$.

ارسم الجزئيات المناظرة

الجواب : انظر شكل 5.61

5.2 () عين مؤثرات الفرق المحدودة التي تناظر المؤثرات التفاضلية التالية وبدلالة الفروق الخلفية ذات الخطأ من المرتبة h^2

(a) $h^2 D_{xy}$, (b) $h^2 \nabla^2$, (c) $h^4 D_{xyxy}$.

ارسم الجزئيات المناظرة

الجواب : انظر شكل 5.62

5.3 (a) عين الحد الاول من الخطأ في مؤثرات المسألة (a), (b), (c)

(b) عين الحد الاول من الخطأ في مؤثرات المسائل (a), (b)

5.4 برهن ان الخطأ في قاعدة الثلث لسمبسن للتكامل الثنائي ذات المرتبة h^4

5.5 جد التكاملات التالية ولاربعة ارقام معنوية بموجب قاعدة الشبه المنحرف مستعملا

شبكات رباعية حيث $n = 2$ والفترات الفرعية $4 =$ والاستيفاء

(a) $\int_2^4 dy \int_4^6 \ln xy^2 dx$.

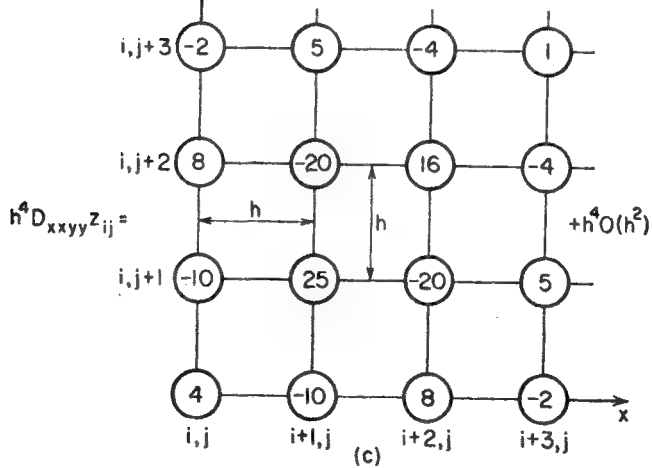
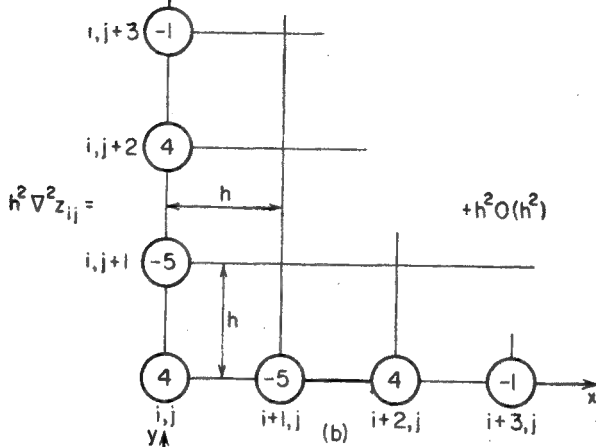
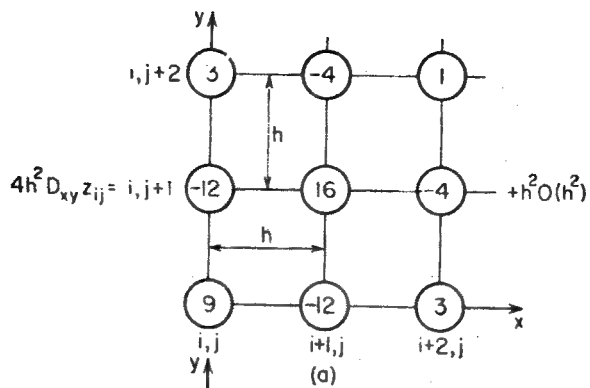
(b) $\int_0^1 dy \int_0^{\pi/2} \sin \sqrt{2xy} dx$.

(c) $\int_1^5 dy \int_1^5 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$.

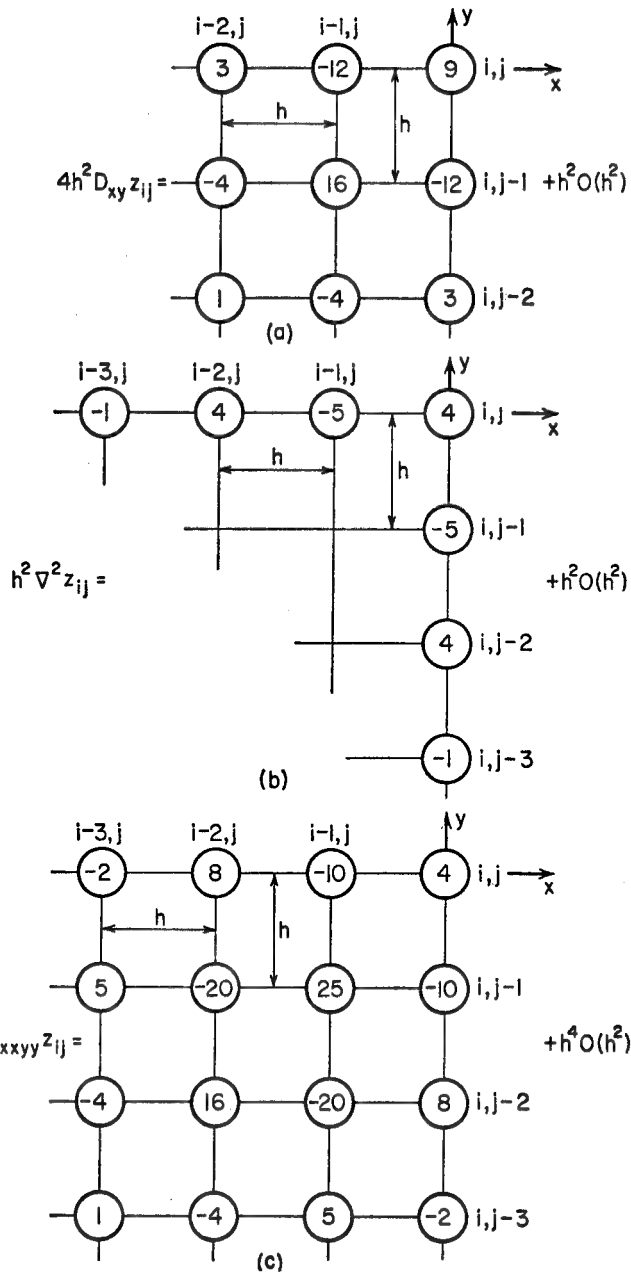
(d) $\int_0^1 dy \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)} dx$.

الجواب :

(a) $A_2 = 14.95$; $A_4 = 15.02$; $A_{2,4} = 15.05$. (c) $A_2 = 4.134$; $A_4 = 3.997$; $A_{2,4} = 3.952$.



شکل (۶۱-۵)



شكل (٥-٦٢)

5.6 جد التكاملات للمسألة 5.5 ولاربعة ارقام معنوية بموجب قاعدة السمبسن الثلثية مستعملا شبكة رباعية حيث $n = 2$ الفترات الفرعية تساوي 4 والاستيفاء .

(b) $A_2 = 1.585$; $A_1 = 1.724$; $A_{2,4} = 1.733$. (c) $A_2 = 3.962$; $A_1 = 3.963$; $A_{2,4} = 3.963$.

5.7 جد التكاملات التالية ولاربعة ارقام معنوية مستعملا شبكة مستطيلة حيث $n = 2$ الفترات الفرعية تساوي 4 والاستيفاء .

(أ) بموجب قاعدة الاشباه المنحرفة .

(ب) بموجب قاعدة سمبسن الثلثية .

$$\int_0^1 dy \int_0^{0.5} \sinh(x^2 y) dx$$

5.8 جد تكامل المعادلة (5.3.10) بموجب قاعدة الشبه المنحرف ولما يأتي :

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\phi_1(y) = 1$; $\phi_2(y) = 2y$; $c = 1$; $d = 4$.

(b) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$; $\phi_1(y) = 0$; $\phi_2(y) = y^2$; $c = 1$; $d = 4$.

(c) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$; $\phi_1(y) = y$; $\phi_2(y) = y^2$; $c = 1$; $d = 4$.

(d) $f(x,y) = x + y^2$; $\phi_1(y) = y^2$; $\phi_2(y) = y$; $c = 1$; $d = 4$.

استعمل : $k = 1, m = 4$

(a) $I = 295.9$. (c) $I = 2.119$: الجواب :

5.9 حل المسائل 5.8 بموجب قاعدة سمبسن حيث $k = \frac{1}{2}, m = 4$

(a) $I = 275.2$. (c) $I = 2.225$. : الجواب :

5.10 عين وبموجب اسلوب ليلمان Liebmann درجة الحرارة المستقرة عند نقاط الارتكاز

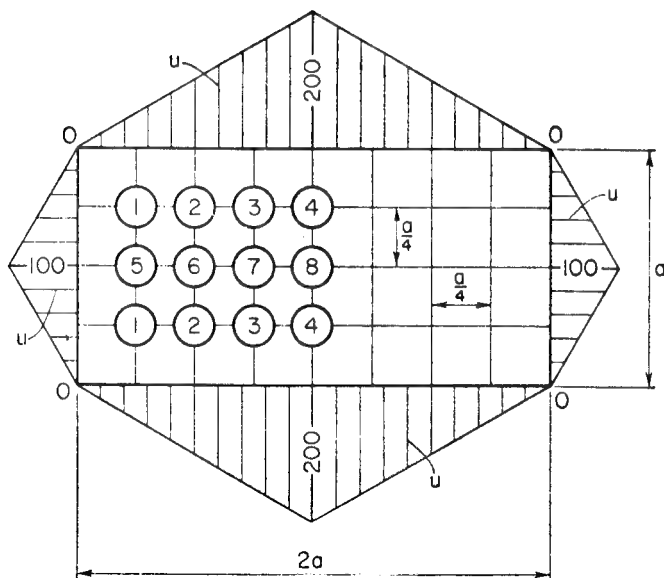
للوح مستطيل الشكل ابعاده b, a من الشكل 5.63

اذا كانت هذه الابعاد ذات درجة حرارة المؤثر في الشكل . استعمل مؤثر الشكل

5.36

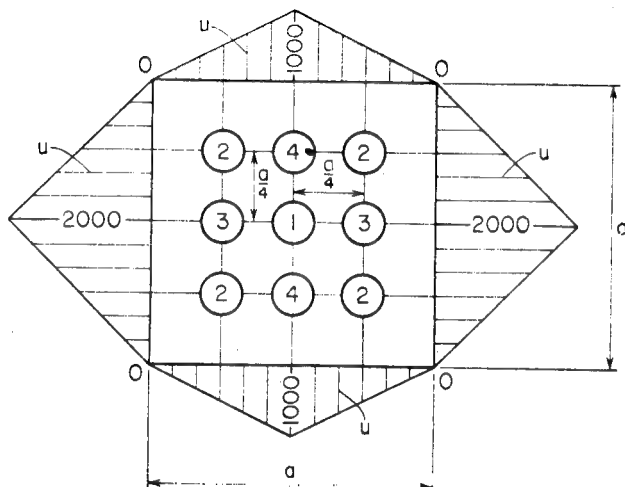
الجواب

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
72	102	132	151	87	104	127	139



شكل (٥-٦٣)

5.11 عين بالمعادلة iteration القيم عند نقاط ارتكاز مربع الشكل 5.64 للدالة التوافقية التي قيمها الحدودية واردة في الشكل . استعمل مؤثر 5.36 حيث $n = 2$ والفترات الفرعية تساوي 4 والاستيفاء .



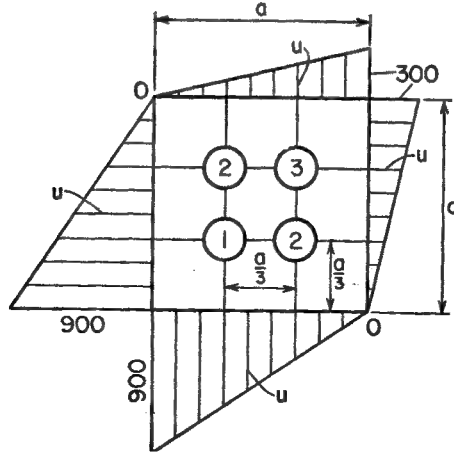
شكل (٥-٦٤)

5.12 عين بطريقة الارحاء درجة الحرارة المستقرة عند نقاط ارتكاز لوح الشكل 5.65

5.3b اذا حفظت اضلاعه في درجة الحرارة المؤشرة في الشكل ، استعمل مؤثر المعادلة

الجواب

$$u_1 = 433; u_2 = 267; u_3 = 233.$$

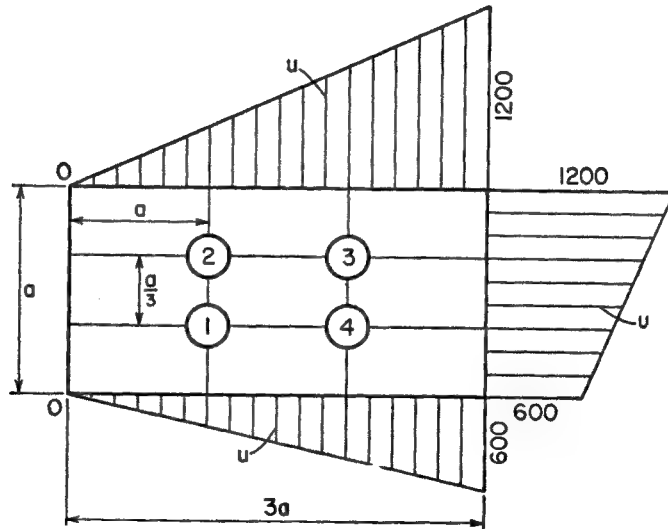


شكل (٥-٦٥)

5.13 عين بطريقة الاسترخاء درجة الحرارة المستقرة عند نقاط ارتكاز لوح في الشكل

5.66 اذا حفظت اضلاعه في درجة الحرارة المؤثرة في الشكل ، استعمل مؤثر المعادلة

(5.2.11)



شكل (٥-٦٦)

5.14.1 ابتدأ حل المسألة 5.12 بطريقة الارخاء الكتلي واستمر بهذا الاسلوب متبعاً فرط الارخاء وتحتة .

5.15.1 ابتدأ حل المسألة 5.10 بطريقة الارخاء الكتلي واستمر بهذا الاسلوب متبعاً فرط الارخاء وتحتة .

5.16.1 استعمل شبكة مدرجة عينها (الفتحة) نصف مآكانت عليه في المسألة 5.13 وفي الجزء الايمن الثالث من اللوح تاركاً الفتحات على حالها فيما عدا ذلك وكى تحصل على تعريف افضل لدرجة حرارة هذه المنطقة .

5.17.1 استعمل شبكة مدرجة حجمها $n = 9$ في الركن الايسر الاسفل من اللوح الوارد في المسألة 5.12 تاركاً الفتحات على حالها فيما عدا ذلك وكى تحصل على تعريف افضل لدرجة حرارة هذه المنطقة .

5.18 (أ) حل بطريقة الاسترخاء المسألة 5.11 مستعملاً المؤثر N للشكل 5.32

(ب) حل بطريقة الاسترخاء المسألة 5.12 مستعملاً المؤثر N للشكل 5.32

5.19 (عين التغير الجانبي عند نقاط ارتكاز غشاء مربع الشكل طول ضلعه L فارضاً ان $PL^2/S = 16.000$ الفترات الفرعية $n = 4$) انظر البند 5.6 . استعمل مؤثر الشكل (5.3b)

الجواب : $u_1 = 1125; u_2 = 875; u_3 = 687.5$

5.20 (لوح مربع الشكل طول ضلعه a مستند استناداً بسيطاً أثقل بثقل منتظم قدره

q عين التغير وعزم الانحناء في مركز اللوح فارضاً بان نسبة بواسان $\nu = 0.3$ استعمل $n = 2, n = 4$ فترات فرعية والاستيفاء .

(تلميح) : معادلة اللوح التفاضلية هي $\nabla^4 w = q/D$ (انظر البند 5.19) والتي يمكن تجزئتها الى معادلتين من المرتبة الثانية وذلك بجعل

$M = (M_x + M_y)/(1 + \nu)$ حيث يدل M_x و M_y على عزمي الانحناء لكل وحدة طول من المقطعين العموديين على المحورين x و y على التوالي .
المعادلات في M, w هي :

$\nabla^2 w = -M/D; \nabla^2 M = -q$ الشروط الحدية لكلتا w و M هي $w = 0$ و $M = 0$ عند الحدود . استعمل مؤثر الشكل 5.3b ثم حل مجموعة المعادلات الآتية لقيم ارتكاز

M, w بموجب نهج كاوس.

الجواب :

$$\begin{aligned} M_2 &= 0.0406qa^2; \quad w_2 = 0.00391qa^4/D; \quad M_4 = 0.0457qa^2; \\ w_4 &= 0.00403qa^4/D; \quad M_{2,4} = 0.0474qa^2; \quad w_{2,4} = 0.00406qa^4/D. \\ M &= 0.0479qa^2; \quad w = 0.00405qa^4/D. \end{aligned}$$

(5.21) عين بطريقة المعاودة iteration قيمة الدالة z المحققة للمعادلة

$\nabla^2 z = 1$ إذا كانت $z = 0$ عند حدود مربع ضلعه a . استعمل مؤثر الشكل

5.3b $a/4, h = a/2$ ثم استوف extrapolate قيمة z عند مركز المربع

(5.22) قيم z عند نقاط ارتكاز مربع ضلعه $a = 4h = 2$. إذا كانت

$\nabla^2 z = x^2 y^2, z = 0$ عند الحدود. افرض نقطة الاصل (النقطة 2) انها

عند مركز المربع واستعمل مؤثر الشكل 5.3b . الجواب :

$$z_1 = z_3 = -0.00391; \quad z_2 = -0.00586.$$

(5.23) حل بطريقة المعاودة iteration المسألة 5.19 مستعملا المؤثر N للشكل

5.32

(5.24) حل المسألة 5.20 مستعملا مؤثر بواسان المحسن للشكل (5.11.4) .

(5.25) (أ) عين بطريقة الاسترخاء قيم ارتكاز الدالة ϕ التي تحقق معادلة الالتواء

$\nabla^2 \phi + 2 = 0$ torsional equation والتي قيمها تبلغ الصفر عند

الحدود للبند من الشكل 5.67a (استعمل مؤثر الشكل 5.3b

(ب) اعد بالنسبة للشكل 5.67b

(ج) عين صلابة الالتواء torsional rigidity للبند من الشكل

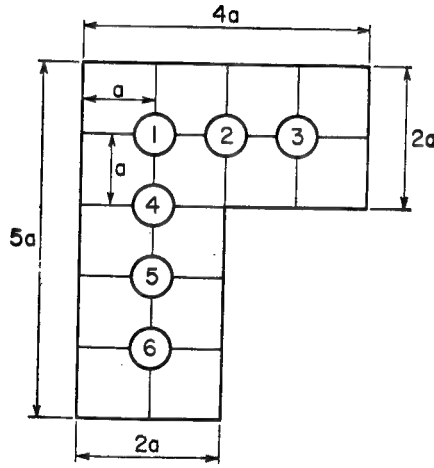
5.67a (انظر البند 5.7)

(د) اعد بالنسبة الى الشكل 5.67b استعمل قاعدة الشبه المنحرف لاستخراج

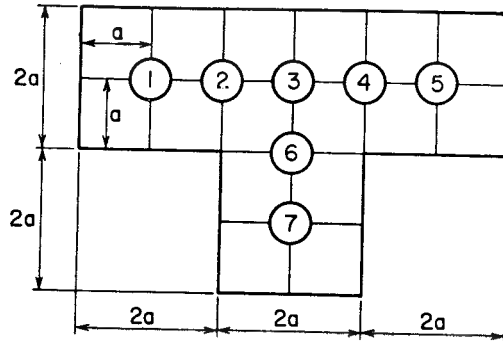
التكامل.

الجواب :

$$(a) \quad \phi_1 = \phi_4 = 0.9756a^2; \quad \phi_2 = \phi_5 = 0.9268a^2; \quad \phi_3 = \phi_6 = 0.7317a^2$$



(a)



(b)

شكل (٧٦-٥)

5.26 (أ) عين قيم دالة الالتواء ϕ في الحالة البلاستيكية المرنة الواردة في البند 5.8

على فرض $\theta = 1.25\theta_0$ وعدد الفترات الفرعية 6

(ب) عين القيمة المناظرة الى M/M_0

5.27 (عين قيمة ϕ_0 للدالة ϕ عند مركز المربع الذي ضلعه a اذا كانت ϕ تحقق

المعادلة $\nabla^4 \phi = 0$ داخل المربع بالشروط $\phi = \theta, \frac{d\phi}{dn} = 1$ عند حدود المربع.

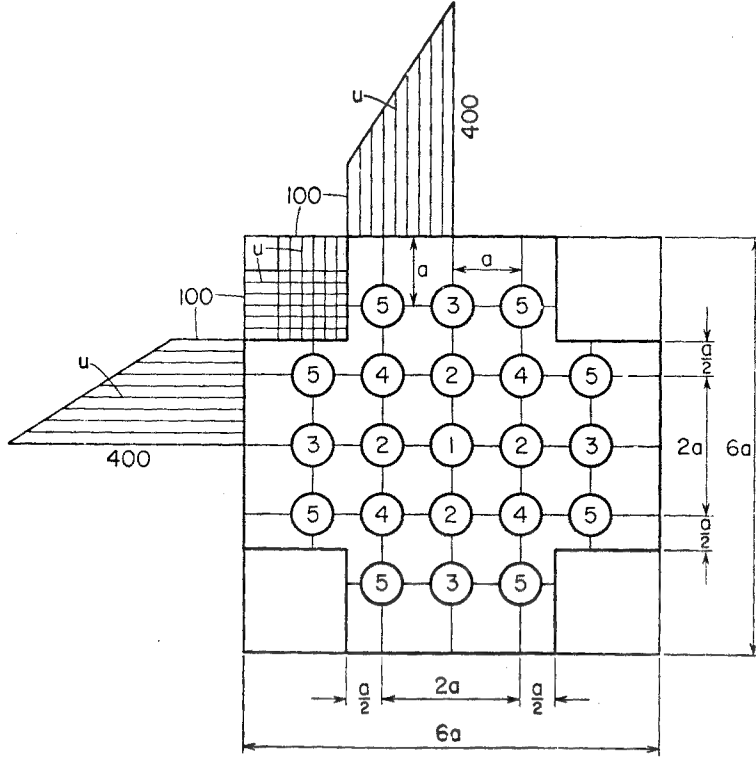
استعمل مؤثر الشكل 5.3c وان $n = 2$ وعدد الفترات الفرعية يساوي 4 .

ملاحظة : n خارج العمود على المربع.

الجواب :

$$n = 2: \phi_0 = -0.1667a; n = 4: \phi_0 = -0.2191a.$$

5.28) جد ولثلاثة ارقام معنوية قيمة الجهد V عند نقاط الارتكاز الشكل 5.68 عندما تكون القيم الحدودية كما هي مؤثرة في الشكل. استعمل مؤثر الفرق للشكل 5.29 تلميح : الجهد V يحقق معادلة لابلاس

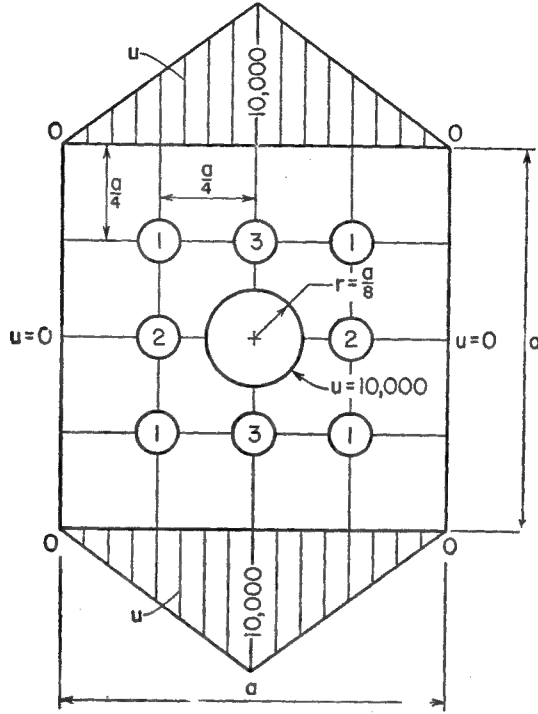


شكل (٦٨-٥)

5.29) جد قيمة درجة الحرارة في الحالة المستقرة وعند نقاط ارتكاز لوح الشكل 5.69 عندما تحفظ الحدود في درجات الحرارة المؤثرة. استعمل المؤثر $\nabla^2 u$ للشكل 5.29 عند جميع النقاط.

الجواب :

$$u_1 = 4833; u_2 = 6056; u_3 = 8278.$$



شكل (٦٩-٥)

5.30 (حدد اصغر تردد لذبذبة غشاء على شكل قطع ناقص نصف محوريه $2a/3, a$

بموجب شبكة مستطيلة حيث $h = a/3, k = a/2$

استعمل قواعد الفرق ذات الخطأ من المرتبة h (انظر البند 5.10).

5.31 (عين اصغر تردد لذبذبة غشاء الذي شكل حدوده تشبه الشكل 5.28 مستعملا

نقاط (لارتكاز لهذا الشكل). (انظر البند 5.10).

استعمل المؤثر ∇^2 ذا الخطأ من المرتبة h عند النقطة 4 واستعمل ايضا المؤثر

∇^2 ذا الخطأ الذي قدره h^2 عند نقاط الارتكاز الاخرى.

الجواب :

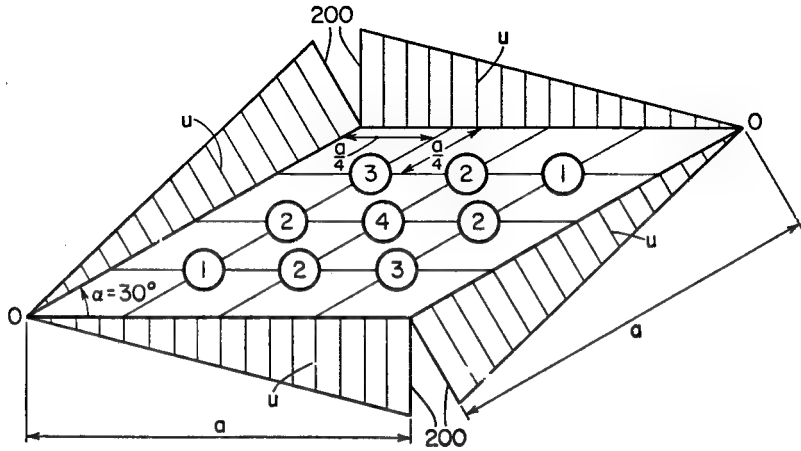
$$\omega = (4.490/L) \sqrt{S/m}.$$

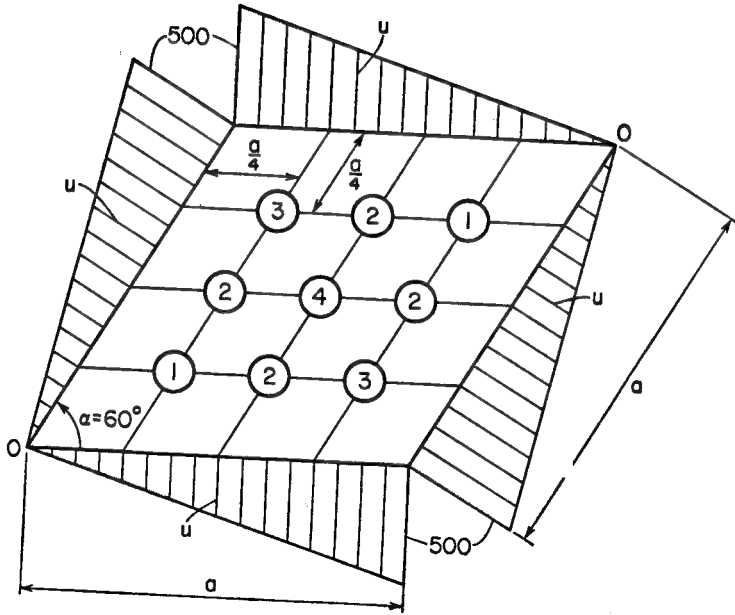
5.32) لوح الشكل 5.28 مربع ضلعه L وقد طوى ركناً منه باقواس دائرة نصف قطرها $L/2$ عين درجة الحرارة u عند نقاط الارتكاز عندما تكون درجة الحرارة في الحدود كما في الشكل. استعمل المؤثرات $\nabla^2 u$ التي الخطأ فيها من المرتبة h^2 عند جميع النقاط.

5.33) عين بطريقة الاسترخاء درجة الحرارة المستقرة عند نقاط الارتكاز للألواح المائلة المبينة في (a) من الشكل 5.70 والمبينة في (b) من الشكل 5.71 عندما تحتفظ أضلاعها في درجات الحرارة المؤثرة.

الجواب :

$$(a) \quad u_1 = 99.6; \quad u_2 = 139.0; \quad u_3 = 160.9; \quad u_4 = 152.2.$$





شكل (٥-٧١)

5.34 (عين التغيرات الجانبية عند مركز غشاء يميل الزاوية $\alpha = 60^\circ$ وله ضلعان متساويان الواحد α عندما تكون نسبة الضغط P الى $S=16,000$ استعمال $n = 2$ وعدد الفترات الفرعية 4 والاستيفاء (انظر البند 5.6).

5.35 (عين اصغر تردد لذبذبة غشاء مائل ذي ضلعين متساويين a وميله $\alpha = 60^\circ$ استعمال المحاور الاحداثية المائلة حين $n = 2$ مع ثلاث فترات فرعية والاستيفاء (انظر البند 5.9)
الجواب :

$$\omega_2 = (4.619/a) \sqrt{S/m}; \quad \omega_3 = (4.880/a) \sqrt{S/m};$$

$$\omega_{2,3} = (5.088/a) \sqrt{S/m}.$$

5.36 (لوح مائل بزاوية 45° مستنداً ببساطة واضلاعه $\sqrt{2}L, L$. يتحدب تحت ضغط N منتظم لكل وحدة طول حدودية ، جد اصغر قيمة حرجة الى N مستعملاً $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاءات . (انظر البند 5.20 والمسألة 5.55)

الجواب :

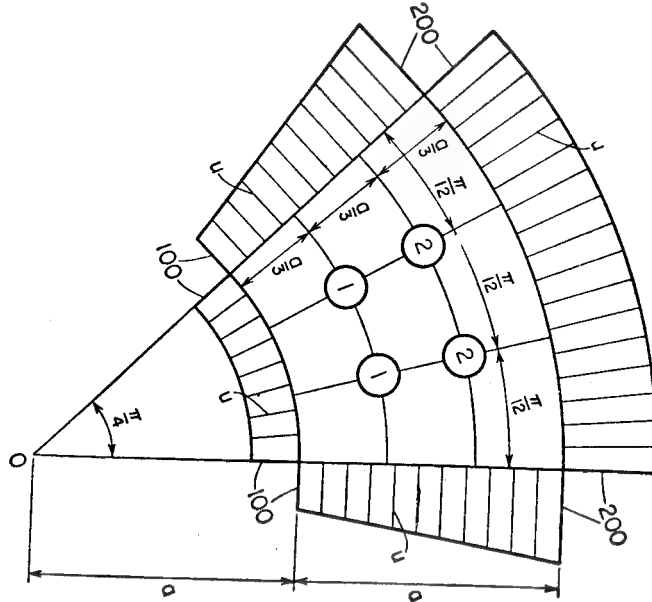
$$N_2 = 24D/L^2; N_3 = 26.63D/L^2; N_4 = 27.15D/L^2;$$

$$N_{2,3} = 28.730D/L^2; N_{3,4} = 27.820D/L^2; N_{2,3,4} = 27.510D/L^2.$$

5.37 (عين قيم ارتكاز الجهد ϕ لقطاع دائري من الشكل 5.72 عندما تكون قيمه الحدودية هي كما هو مؤشر في الشكل . استعمل $n = 2$. من الفترات الفرعية تدميح : الجهد ϕ يحقق معادلة لابلاس $\nabla^2\phi = 0$)

الجواب :

$$Ans. \quad n = 2: \phi = 155; \quad n = 3: \phi_1 = 138; \quad \phi_2 = 171.$$



شكل (٧٢-٥)

5.38 (عين التغيرات عند نقاط ارتكاز غشاء حلقي نصف قطره الداخلي a ونصف قطره الخارجي $3a$. الناجمة من ضغط منتظم قدره p وشد منتظم S استعمل $n = 2$ ، من الفترات الفرعية والاستيفاء في الخط المركزي للغشاء (انظر البند 5.6))

5.39 (عين اصغر تردد لذبذبة الغشاء الواردة في المسألة 5.38 مستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء (انظر البند 5.9) .)

Let $w = \omega a \sqrt{m/S}$.

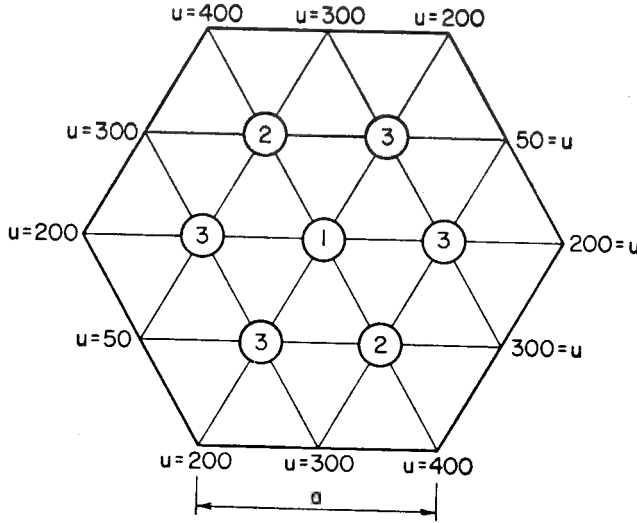
اجعل

$$w_2 = 1.4142; \quad w_3 = 1.4893; \quad w_4 = 1.5153; \quad w_{2,3} = 1.5495; \\ w_{3,4} = 1.5487.$$

الجواب :

5.40 الدالة $u(x,y)$ تحقق المعادلة $\nabla^2 u = 0$ في داخل مسدس طول ضلعه a كما ان قيمها هي المؤشرة في الشكل 5.73 عند الحدود. عين بطريقة المعاودة iteration ولثلاثة ارقام معنوية قيم u عند نقاط الارتكاز المؤشرة في الشكل .
الجواب

$$u_1 = 233; \quad u_2 = 276; \quad u_3 = 212.$$



شكل (٧٣-٥)

5.41 عين دالة جهد الالتواء المرن elastic torsional stress التي تحقق المعادلة $\nabla^2 \phi + 2 = 0$ عند نقاط ارتكاز مقطع عرضي على شكل مثلث متساوي الاضلاع مستعملا $n = 4, 5, 6$ من الفترات الفرعية. علما بان قيمة $\phi = 0$ عند الحدود.
(انظر البند 5.7) .

الجواب

$$\omega_3 = (6/a) \sqrt{S/m}; \quad \omega_4 = (6.532/a) \sqrt{S/m}; \quad \omega_5 = (6.788/a) \sqrt{S/m}; \\ \omega_{3,4} = (7.216/a) \sqrt{S/m}; \quad \omega_{4,5} = (7.243/a) \sqrt{S/m}; \\ \omega = (7.255/a) \sqrt{S/m}.$$

5.42 عين اصغر تردد لذبذبة غشاء على شكل مسدس منتظم طول ضلعه a . استعمل $n = 3, 4, 5$ من الفترات الفرعية والاستيفاء . (انظر البند 5.9)

عين اصغر تردد لذبد به عشاء مست الشكل كما في شكل 5.74 استعمال $n = 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء .

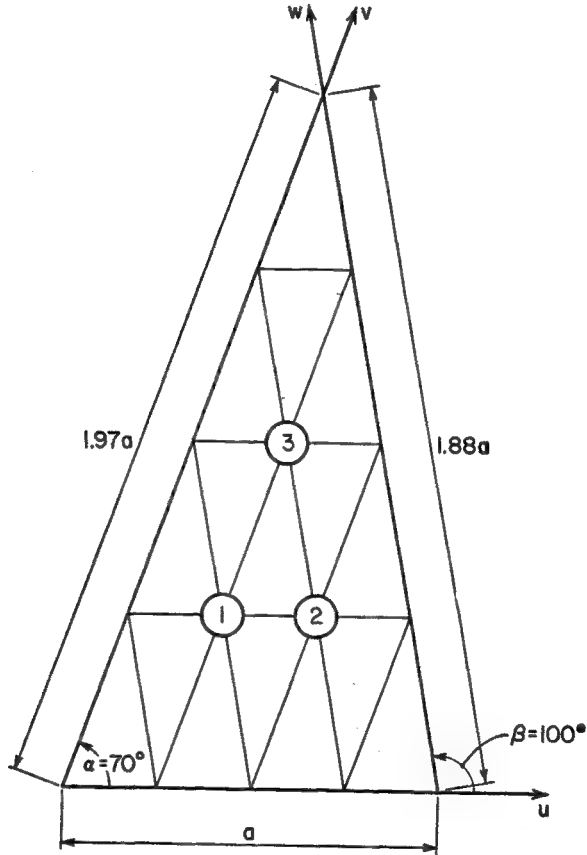
تلميح : اشتق المؤثر ∇^2 في المحاور الاحداثية حيث $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 100^\circ$ واجعل التغيير :

$$z(u, v, w, t) = z(u, v, w) \sin \omega t$$

$$\omega_3 = (4.701/a) \sqrt{S/m}; \quad \omega_4 = (4.859/a) \sqrt{S/m};$$

$$\omega_{3,4} = (5.062/a) \sqrt{S/m}.$$

شكل (٧٤-٥)



5.45 لوح على شكل مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه a يستند استناداً بسيطاً ويؤثر عليه ثقل منتظم قدره q .

عين التفرجات عند نقاط ارتكاز اللوح ، مستعملاً $n = 3, 4, 5, 6$ من الفترات الفرعية واستوف extrapolate التغيير المركزي w_0 (انظر المسألة 5.20) .

الجواب :

$$\begin{aligned} n = 3; w_0 &= 0.00077qa^4/D. \quad n = 4; w_1 = 0.00055qa^4/D. \quad n = 5; \\ w_1 &= 0.00036qa^4/D, w_2 = 0.00054qa^4/D. \quad n = 6; w_1 = 0.000241qa^4/D, \\ w_2 &= 0.000434qa^4/D, w_0 = 0.000627qa^4/D. \quad w_{3,6} = 0.000579qa^4/D. \end{aligned}$$

5.46 لوح على شكل مثلث متساوي الاضلاع طوله a يستند استنادا بسيطا وهو يتحذب نتيجة ضغط منتظم قدره N لكل وحدة طول حدودية . عين اصغر قيمة تحذب N مستعملا $n = 3, 4, 5$ من الفترات الفرعية والاستيفاء . (انظر البند 5.20 والمسألة 5.55) .

5.47 لوح مسدس الشكل طول ضلعه a يستند استنادا بسيطا ويتحذب نتيجة ضغط منتظم قدره N لكل وحدة طول حدودية . عين اصغر قيمة تحذب N مستعملا $n = 1, 2, 3$ من الفترات الفرعية والاستيفاء . (انظر البند 5.20 والمسألة 5.55) .

$$\begin{aligned} N_1 &= 4D/a^2; \quad N_2 = 6.28D/a^2; \quad N_3 = 6.77D/a^2; \quad N_{1,2} = 7.04D/a^2; \\ N_{2,3} &= 7.16D/a^2; \quad N_{2,3,4} = 7.18D/a^2. \end{aligned}$$

5.48 حل المسألة 5.45 مستعملا مؤثر بواسان المحسن الوارد في البند 5.15

5.49 (أ) عين درجة الحرارة $u(x,t)$ في قضيب ماطوله L سطحه الجانبي معزولا علما بان نهايته قد حفظت في درجة حرارة صفروان درجة حرارته الابتدائية هي

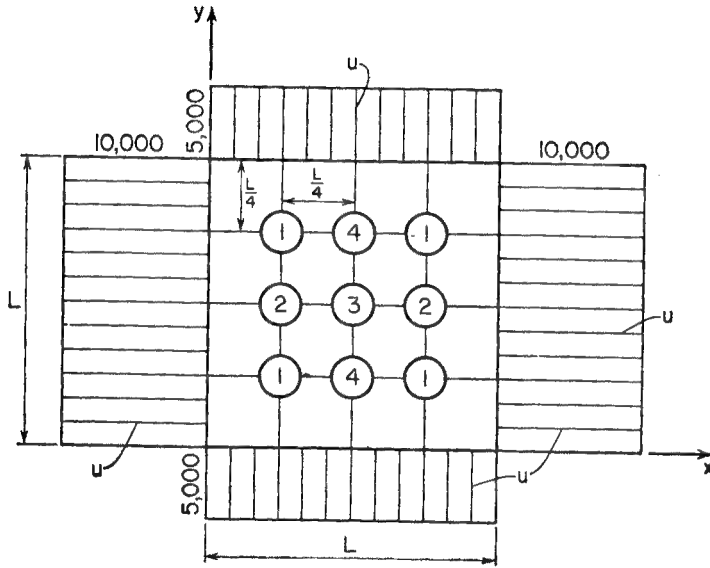
$$u(x,0) = 100x/L \quad \text{استعمل حجم العين} \quad \text{mesh size } h = L/4$$

$$\text{مستخدما} \quad K = L^2/32 \quad \text{على فرض} \quad K = 1$$

(ب) حل المسألة نفسها محافظاً النهاية $x = 0$ في درجة حرارة صفر ومعتبرا

$$u_x = 10/L \quad \text{في} \quad x = L$$

5.50 اللوح المربع في الشكل 5.75 في البداية كانت درجة حرارته صفروله ضلعان متقابلان حيث فجأة قد رفعت درجة حرارته الى درجة هي $10,000^\circ$ والضلعا الآخران قد رفعت درجة حرارتهما الى $5,000^\circ$. عين درجة الحرارة بالنسبة الى الزمن بموجب طريقة (بندر شمدت) مستعملا حجم العين $h = L/4$ عندما $n = t/k$ التي تتغير من الصفر الى 10



شكل (٥-٧٥)

الجواب

$n = t/k$	u_1	u_2	u_3	u_4
1	3750	2500	0	1250
2	4687	4375	1875	3125
5	6562	6718	5625	5468

5.51 حل مسألة 5.50 فارصا درجة الحرارة الابتدائية فوق اللوح باكملة تساوي 100° وان $\partial u / \partial n = 10$ فوق الحدود كلها.

5.52 عين قيمة α التي تضمن وتجعل درجة الحرارة المستقرة في حالة تناقص في المسألة من البند 5.17 عندما تكون شروطها الحدودية كالاتي : (اجعل $K = 1$) .

$$(a) \quad u(0, t) = 0; \quad u_x(L, t) = \alpha.$$

$$(b) \quad u(0, t) = 0; \quad u(L, t) + 2u_x(L, t) = 0.$$

5.53 (أ) عين ازاحات سلك $y(x, t)$ حيث $w = 90$ (باوند / قدم) . مسحوب بقوة $S = 10$ من الباوندات اذا كان :

$$y(x, 0) = x(L - x)/L^2, \text{ for } x = 0(2)10, t = 0(1)5.$$

(ب) حل المسألة نفسها اذا كان السلك في البداية ساكنا وكانت ازاحته اليسرى $y(0, t) = t$.

5.54 لوح مستطيل الشكل ضلعا $a, 2a$ منتظم ومتقل قد ثني من جهة اضلاعة الصغرى ومسد اسنادا بسيطا من جهة اضلاعه الكبرى . عين التغير عند مركز اللوح مستعملا $h = a/2$ (انظر البند 5.19) .

تلميح : الشروط الحدودية بالنسبة للحافات المستندة ببساطة هي $w = 0$
 $\partial^2 w / \partial n^2 = 0$

5.55 لوح مربع الشكل طول ضلعه a يستند ببساطة ويتحدب بتأثير ضغط قدره N لكل وحدة طول حدودية . عين أصغر قيمة للتحذب N مستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية (انظر البند 5.20) .
 تلميح : المسألة يعبر عنها بالمعادلات :

$$\nabla^4 w + \frac{N}{D} \nabla^2 w = 0; w = 0, \nabla^2 w = 0$$

عند الحدود اجعل $\nabla^2 w = 0$ واستعمل مؤثر الشكل 5.3b

الجواب : $N_2 = 16D/a^2; N_3 = 18D/a^2; N_4 = 18.75D/a^2; N_{2,3} = 19.6D/a^2;$
 $N_{3,4} = 19.71D/a^2; N_{2,3,4} = 19.75D/a^2; N = 19.74D/a^2.$

انظر تيمونشيمكو . ونسكي كرايندر نظرية اللوح والقشريات ص 378

5.56 لوح مستطيل الشكل أحد ابعاده $2a$ (يستند ببساطة) يوازي x والبعد الآخر y يوازي y يتحدب بتأثير ضاغط منتظم قدره N لكل وحدة طول حدودية . عين أصغر قيمة للتحذب N وبالمحاور المتعامدة ومستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء (انظر البند 5.20 والمسألة 5.55) .

5.57 لوح مستطيل بعاده $a, 2a$ (مثبت) يوازيان x, y على التوالي يتحدب بتأثير ضغط منتظم هو N لكل وحدة حدودية . عين أصغر قيمة تحذب الى N مستعملا $n = 2, 3$ من الفترات الفرعية والاستيفاء (انظر البند 5.20) .
 الجواب : $N_2 = 16.8D/a^2; N_3 = 26.55D/a^2; N_{2,3} = 34.35D/a^2.$

5.58 لوح مربع الشكل يستند ببساطة ويتحدب بفعل ضغط منتظم قدره N لكل وحدة طول مستخدمة الى الضلعين المتقابلين عين اصغر تحذب الى N مستعملا $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية (انظر البند 5.20) .

الجواب : $N_2 = 32D/a^2$; $N_3 = 36D/a^2$; $N_4 = 37.51D/a^2$; $N_{2,3} = 39.20D/a^2$;
 $N_{3,4} = 39.46D/a^2$; $N_{2,3,4} = 39.54D/a^2$; $N = 39.48D/a^2$.

5.59 حل المسألة 5.58 بطريقة فصل المتغيرات متخذاً

$$w = Y(y) \sin (\pi/a)x$$

ومستعملاً $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية .

5.60 لوح مربع الشكل طول ضلعه a مسنود ببساطة ويتذبذب بحرية . عين اصغر تردد له بموجب المؤثرات الفروق المحدودة حيث الخطأ فيها من المرتبة h^2 . ومستعملاً $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء .
 تلميح : المعادلة التفاضلية للوح المتذبذب هي :

$$D\nabla^4 w + m\partial^2 w/\partial t^2 = 0,$$

علماً ان m تدل على الكتلة لكل وحدة مساحة . عوض :

$$w(x,y,t) = z(x,y) \sin \omega t$$

5.61 لوح مستطيل الشكل ابعاده $2a, a$ مسنود ويتذبذب بحرية . المطلوب تعيين اصغر تردد بموجب الفروق المحدودة مستعملاً $3, 2$ من الفترات الفرعية والاستيفاء (انظر المسألة 5.60).

الجواب : $\omega_2 = (12.962/a^2) \sqrt{D/m}$; $\omega_3 = (17.283/a^2) \sqrt{D/m}$;
 $\omega_{2,3} = (20.740/a^2) \sqrt{D/m}$.

5.62 لوح مستطيل الشكل مثبت من جانبه ذو طول $2a$ (الموازي الى x) ومسنود ببساطة اتجاه الضلع الاخر الذي طوله a (الموازي الى y) . اللوح يتذبذب بحرية . عين اصغر تردد بموجب فصل المتغيرات والفروق المحدودة عندما $n = 2, 3, 4$ من الفترات الفرعية والاستيفاء .

تلميح : اجعل

$$w(x,y,t) = Y(y) \sin (\pi/2a)x \sin \omega t$$

في المعادلة للوح المسألة 5.60 . اجعل :

الجواب

$$W = \omega a^2 \sqrt{m/D}.$$

$$W_2 = 13.175; \quad W_3 = 17.132; \quad W_4 = 19.373; \quad W_{2,3} = 20.298;$$

$$W_{3,4} = 22.254; \quad W_{2,3,4} = 22.906.$$

المحتويات

الموضوع

٣	مقدمة المترجمين
٥	مقدمة الطبعة الثانية
٦	مقدمة الطبعة الأولى
										الفصل الأول

٩	الحلول العملية للمعادلات الجبرية والمتساوية
١٨	حل المعادلات من الدرجة الرابعة بطريقة براون
١٩	طريقة كرايفي
٢٣	تعيين الجذور المركبة بالمعاون
٢٨	المعادلات المتسامية
٣٢	حل المعادلات الخطية الآتية بالمحددات
٣٤	نهج كاوس
٣٧	المصفوفات
٤٥	معكوسة المصفوفة
٤٧	طريقة المعاودة لكاوس - سايدل
٥٠	حل المعادلات الخطية بطريقة الارحاء
٥٧	مجاميع غير منتهية من المعادلات
٥٨	تواؤم المعادلات
٦٢	المعادلات الآتية اللاخطية
٦٩	تمارين

الفصل الثاني

٨٢	الفروق المحدودة وتطبيقاتها العملية
٨٢	مقدمة
٨٢	معادلات التفاضل باستكمال قطوع مكافئة
٨٥	صيغ التفاضل بطريقة فتح الدوال بمفكوك متسلسلة تيلر
٨٨	الفروق الخلفية التراجمية

٢٠٢	نهج كاوس
٢٠٤	الارخاء
٢٠٨	تحسين الحل بالاستيفاء
٢٠٩	حل المسائل العالية المرتبة بالفروق المركزة
٢١٣	حل مسائل القيم المميزة
٢١٧	استعمال نقاط ارتكاز غير منتظم الفواصل
٢٢٠	تمارين

الفصل الخامس

٢٣٠	الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية
٢٣٠	تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية
٢٣١	المعادلات الاهليجية (المعادلات الناقصة)
٢٣٣	المعادلات المكافئة
٢٣٣	المعادلات الزائدية
٢٣٣	مؤثرات الفروق الجزئية في الاحداثيات الديكارتية
٢٣٩	التكامل المزدوج العددي
٢٣٩	قانون شبه المنحرف
٢٤٢	قانون سمبسون الثنائي
٢٤٤	تكاملات ذات حدود عليا متغيرة
٢٤٨	حل معادلة لابلاس بالمعاودة
٢٤٩	منظومة المعادلات الخطية
٢٥١	حل معادلة لابلاس بالارخاء
٢٥٥	حل معادلة بواسان بالارخاء
٢٦٠	اللي المدن
٢٦٤	حل مسألة في اللي اللدن بالارخاء
٢٧٢	اهتزاز الاغشية
٢٧٥	نقاط الارتكاز قرب الحدود المنحنية
٢٧٩	مؤثر بواسان المحسن في المحاور الاحداثية المتعامدة
٢٨٢	المؤثر اللابلاسي في المحاور الاحداثية (المائبة)
٢٨٦	مؤثر لابلاس في المحاور القطبية

٢٩١	المؤثر اللا بلاسي في المحاور الاحداثية المثلثية
٢٩٦	مؤثر بواسان المحسن في المحاور الاحداثية المثلثية
				مسائل سريان الحرارة العارض (المعادلات
٣٠٠	التفاضلية الجزئية المكافئة)
				المسألة الزمنية - الفضائية الاحادية البعد.
٣٠٠	سريان الحرارة في قضيب
٣٠٦	المسألة الزمنية - الفضائية الاحادية البعد
٣٠٦	سريان الحرارة في صفيحة
				استقرار الحل العددي لمعادلة التوصيل الحراري احادية
				البعد (المعادلات المكافئة)
٣١٠	مسألة الوتر المهتز (المعادلات التفاضلية الجزئية الزائدية)
٣١٤	مسألة قيم حدودية حاوية على
٣١٨	مسائل القيم المميزة ثنائية البعد
٣٢١	حل المعادلات التفاضلية الجزئية بفصل
				المتغيرات والفروق المحدودة ...
٣٢٦	تمارين ...
٣٢٩	

كلية طباطبائية مطبوعة دار الكتب العلمية والنشر

رقم الايداع في المكتبة الوطنية (٢٨٣) (بغداد لسنة ١٩٨٢